

توانا بود و سرکه دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب جبر

برای سال دوم دبیرستانها

بها و تمام کشور ۱۶ ریال

حق چاپ محفوظ

۱۳۲۴

بنگاه علمی

M.A. LIBRARY, A.M.U.



PE3310



*With the Compliments
of
The Cultural Counsellor
of
The Iranian Embassy
New Delhi.*

فصل اول

حرفها و نشانه ها و دستورهای هبری

۱- در علم حساب عدد برای بخش یک چندی (دکیت) است نسبت به یکده (داده) آن چند
مثلاً هرگاه بگوئیم در ازای فلان پارچه ۷ متر است عدد ۷ مینماید که این در از ۷ برابر یکده
در از این متر است و همچنین هرگاه بگوئیم وزن این روغن $۲\frac{۳}{۴}$ کیلو است عدد $۲\frac{۳}{۴}$ مینماید
که این وزن ۲ یکده و $\frac{۳}{۴}$ یکده وزن را دربردارد.

۲- چنانکه میسرایم در مسئله های حساب عدد دانی مانند عدد های بالا ۷ و $۲\frac{۳}{۴}$ بکار
میرود. مانند مسئله زیر:

فرد کارگری در روز ۱۲ ریال است پس از ۵ روز چقدر باو میرسد؟

و نیز در بهره کاری: مثلاً، مسئله دانی در ردی عدد های مختلف که نایش سر است

و زمان و نرخ و سود است طرح میشود مانند مسئله زیر:

مطلوبت سود ۲۵۰ ریال سرمایه از قرار نرخ جز در مدت دو سال - که پس از آن

مختصری نتیجه میشود:

$$\frac{۲۵۰ \times ۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۳۰ \text{ ریال}$$

و میدانیم که این مسئله و مسئله های مانند آنرا بوسیله دستور

$$x = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{۱۰۰} \quad (۱)$$

حل میکردیم که در آن x بجای شود α بجای سرمایه و β بجای نرخ و γ بجای زمان گذارده شده و معنای آن این است:

سود مساوی است با سرمایه ضرب در نرخ ضرب در زمان بقسط هر ۱۰۰

از روی این دستور نه تنها مسئله بالا را میتوان حل نمود بلکه هر مسئله ای که مانند آن باشد نیز از روی

این دستور حل میشود چنانکه اگر سرمایه ۱۲۰ ریال و نرخ ۹٪ و زمان ۵ سال باشد از روی دستور اول مذکور چنین میشود

$$\text{ریال } ۵۴ = \frac{۱۲۰ \times ۹ \times ۵}{۱۰۰} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{۱۰۰}$$

در مسئله اول α مساوی ۲۵۰ در مسئله دوم مساوی ۱۲۰ میباشد و در مسئله های دیگر

ممکن است بجای سرمایه های دیگر بکار رود. همچنین است حرفهای دیگر که در دستور اول بکار رفته

بنابرین از بکار بردن حرفها در مسئله ها دستور ثانی مانند دستور اول بدست میآید و از روی

این دستور تا که رابطه ثانی هستند شامل حرف و عدد و نشانه اعلاست، مخصوصه ما ساده شده و مسئله ها باسانی حل میگردد.

مثال - میدانیم مساحت مستطیل مساوی حاصل ضرب قاعده و ارتفاع آنست - اگر

اندازه قاعده را از روی یک درازا مثلاً سائیمتر به α و اندازه ارتفاع را از روی همان یک،

به چگ و مساحت را در محاسبه مساحت مثلثات متشابه (به S بنامیم این دستور $S = ax$ نتیجه میشود که از روی آن میتوان مساحت مستطیلی را بدست آورد.

۳- از آنچه گفته شد معلوم میشود هرگاه در مسئله ای بجای عدد ما حرف گذاشته شود آن مسئله صورت کلی پیدا میکند و از حل آن میتوان مسئله ای زیادی مانند آن را حل نمود و منظور عمده علم حبر و متاخذ نیز همین است یعنی ساده نمودن محاسبه ما و عمومیت دادن محل مسئله ما بواسطه بکار بردن حرف و نشانه ما

نشانه ما برای آسان نمودن حل مسئله و حرف ما برای عمومیت دادن محاسبه ما بکار میروند
۴- حرف ما بیشتر در حروف الفبا، لایتن α و β و γ و غیره را برای نمایش چندیمهای دانسته معلوم و حرفهای آخر α و β و γ و غیره برای نمایش چندیمهای مجهول بکار میسبند.

و قی که بخوانند چند مقدار مانند هم را بنامند آنها را با یک حرف نموده اختلافشان را با مشخصه آن زبری در بالا کی بهمت راست و یا شماره ای در زیر کی بهمت راست بنامند مثلاً بنویسند α و β و γ ... (بخوانند α زیر یک و β زیر دو و غیره) و یا α و β ... (بخوانند α زیر یک و β زیر دو و غیره).

۵- نشانه ما علامت \pm نشانه ما معلوم میکنند علما یا رابطه ای که باید بین عدد ما و حرف ما برقرار باشد. مهمترین آنها از این قرارند:

الف- نشانه ما می مخصوص چهار عمل اصلی- همان نشانه هاست که در حساب

هم بکار میبرند

+ علامت افزودن عددی بر عدد دیگر است مانند $c + 12$ و $2 + 5$ و $a + b$

- نمایش کاستن عددی از عدد دیگر است مانند $x - 1$ و $5 - 2$ و $a - b$

\times بنماید که باید دو عدد در هم ضرب شوند مانند $2 \times d$ و $a \times b$

حاصل ضرب دو عدد a و b را چنین نیز نویسند $a \cdot b$ یا $a b$

مانند $d \cdot x$ و xy

: یا - علامت تقسیم کردن عددی بر عدد دیگر است

مانند $b : a$ یا $\frac{a}{b}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{12}{xy}$

ب - علامتهای مقایسه:

= نمایش مساوی بودن دو مقدار است مانند $a = b$ و $2 = x$

\neq علامت اختلاف دو مقدار است مانند

$$5 \neq 7 \text{ و } a + 1 \neq a + 7 \text{ و } 4 + 3 \neq 10$$

< یا > - برای اینکه بنویسند عددی کوچکتر از عدد دیگر یا بزرگتر از آنست علامت < یا >

بکار میبرند چنانکه $b < a$ یا $a > b$ هر دو بنماید که عدد a بزرگتر از b میباشد

مانند $3 < 7$ و $9 > 5$

> یا < این دو علامت را وقتی بکار میبریم که نخواهیم نویسیم حد اقل یا اکثر عددی

مانند a مساوی عددی مانند b است مثلاً $a \geq b$ بنماید که عدد a بزرگتر از b و یا

کم مساوی با آن می باشد و همین رابطه می باید که جگه کوچکتر از α و یا اکثر مساوی با آنست
 ج- پرانتزها - وقتی مقدار ثانی باث نه های چهار عمل اصلی در داخل پرانتزها (یا
 گروه شده) [و یا آنگاه] { } متنه اگر گرفته باشند حکم مقدار واحد پیدا میکنند و این پرانتزها
 حاصل تمام عملهای بین این مقدار را می نمایند مثلاً $\alpha + (5-3)$ می نمایند که باید برهه حاصل
 پرانتز یعنی ۲ را اضافه کرد.

یادآوری - برای حساب کردن بر عبارتی که در آن جمع و تفریق و ضرب و تقسیم
 باشد باید نخست عمل های ضرب و تقسیم را بر تفریق که نوشته شده انجام داد و سپس جمع و تفریق

مثلاً $27 - 18 : 6 \times 2 + 5 \times 3 =$

$27 - 3 \times 2 + 15 =$

$27 - 6 + 15 = 36$

بنابرین عبارت $7 + 2 \times 8 - 5$ یا $(7+2) \times (8-5)$ تفاوت کلی دارد چه

$7 + 2 \times 8 - 5 = 7 + 16 - 5 = 18$

$(7+2) \times (8-5) = 9 \times 3 = 27$

تمرین - این عبارت ها را حساب کنید

$38 : 6 - 4(7-2) : 10 + 5(4+3 \times 2)$

۶ : ۲ (۵-۲) - ۲ : ۴ : ۳۶

[] - وقتی بنحواهند حاصل علمای چند پرانتس را بنایند آنها را در داخل کرده
قرار میدهند.

چنانکه عبارت $[۱۸ - (۹ - ۵)] \times ۳$ معلوم میکنید که باید عدد ۳ را در حاصل کرده ضرب
نموده و حاصل کرده اینطور بدست میاید که از عدد ۸ حاصل پرانتس یعنی ۳ را کم کنیم
بنابراین حاصل کرده مساوی ۳ و عبارت بالا مساوی ۱۲ میشود.
{ } - هرگاه مقصود نمایش حاصل علمای چند کرده باشد آنها را در داخل علامت آکلاد
{ } قرار میدهند.

چنانکه از عبارت $\{ [۷ - (۹ - ۵)] - ۲ \} - ۱۷$ معلوم میشود که باید از عدد ۱۷ حاصل
آکلاد را کم است - برای تخمین آکلاد حاصل کرده یعنی ۳ را در ۲ ضرب بنماییم و حاصل آن
یعنی ۶ را از ۱۵ میگوییم بنابراین حاصل آکلاد ۹ و عبارت بالا مساوی ۸ میشود
پرسش های ساده شفاهی

۱- عبارت های زیر را بنویسند

$$۵ - ۸ = ۷ \quad , \quad x : ۲ \quad , \quad ۵ \times ۵ \quad , \quad ۶ - ۶$$

$$۲x - ۷ = ۱۸ \quad ; \quad d = ۲e + ۳ \quad ; \quad v = \frac{3}{p} \pi R^2$$

۲- در هر یک از عبارت های پائین چه عملی باید کرد؟

$$۲a - xy + b$$

$$\frac{x-2}{3}$$

-۷-

$$\frac{x}{a} - 5(x+y) \quad (a+b)(a-b)$$

$$r: [a - (2x+5)]$$

۲- مقصود هر یک از روابطی زیر را بیان کنید

$$x < 2a \quad x > 2 \quad 2x - 5 = ab$$

$$a - 2b \neq 2 \quad a: 5 \quad ab < \frac{1}{3}$$

۳- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بنویسید

$$2(2+5) \quad 5(9-3): 2$$

$$(2+2)(9-2) \quad (12-8):(6-4)$$

$$\sqrt{(2+5)(9-2)} \quad \sqrt{21-3} : 5$$

۵- مقدار عددی عبارت های زیر را حساب کنید

$$4h^2 \quad \text{وقتی که } h = 4 \quad \text{یا وقتی که } h = 2 \quad \text{باشد}$$

$$ab^2 \quad a = 2 \quad b = 5 \quad \text{باشد}$$

$$m = 9 \quad (m+n)^2 \quad n = 4 \quad \text{باشد}$$

$$a = 4 \quad (a-b)^2 \quad b = 1 \quad \text{باشد}$$

$$n = 25 \quad \sqrt{n-x} \quad x = 2 \quad \text{باشد}$$

۶- در مثلثی S نایب المساحت و a قاعده و h ارتفاع دارد برآنت این رابطه را

$$S = \frac{1}{2} ah$$

توضیح دهید

۷- در مستطیل S رانایش مساحت و هر نصف محیط a و b ضلع ای آن میباشد منهای

این دو را بطریقت ۱

$$S = ab$$

$$2p = 2(a+b)$$

۸- V حجم کره و R شعاع آنست از $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ چه میفید؟

۹- مجموع دو عدد a و 3 را نایش دهید.

۱۰- مجموع دو عدد a و b را نایش دهید.

۱۱- تفاضل دو عدد a و b را نایش دهید.

۱۲- تفاوت هزار و دو نفر ۲۰ ریال است بوسیله یک تساوی بنمایند.

۱۳- بنویسید که $a + 3$ مساوی سه برابر b است.

۱۴- بنویسید که $a + 3$ بزرگتر از دو برابر $3 - b$ است.

۱۵- درستی تساویهای زیر را با اعداد مقداری مختلف x تحقیق کنید.

$$x + x = 2x$$

$$x + x + 13 = 13 + 2x$$

$$3(x + 3) = 3x + 9$$

بکار بردن نشانه و حرف

۱۶- اینک از دو مسئله زیر روشن شود که چگونه بکار بردن حرف نشانه سبب آسانی

حل مسئله میگردد و در ضمن اجزای حسابی مسئله و تقایم آن با حل جبری برتری علم جبر بر حساب واضح میشود

مسئله ۱- مجموع دو عدد ۲۵ و تفاضل آنها ۱۳ است آن دو عدد کدامند؟

حل حسابی- بنا بر فرض عدد بزرگتر ۱۳ یکه بیش از عدد کوچکتر است و چون مجموعشان در دست است پس اگر از این مجموع ۱۳ را کم کنیم مانده یعنی ۱۲ دو برابر عدد کوچکتر میشود بنابراین عدد کوچکتر نصف ۱۲ یا مساوی ۶ است و چون ۱۳ بر آن بهفترانیم عدد بزرگتر بدست میآید

$$6 + 13 = 19$$

حل جبری- عدد کوچکتر را که نمیدانیم به x بنامیم عدد بزرگتر برابر $x + 13$ و مجموعشان مساوی $(x + 13) + x$ یا $2x + 13$ میشود و بنا بر فرض این مجموع ۲۵ است یعنی

$$2x + 13 = 25$$

چون ۱۳ از دو طرف تسادی کم کنیم حاصل میشود

$$2x = 12$$

و از آنجا

$$x = 6$$

و بنابراین عدد بزرگتر مساوی $19 = 13 + 6$ میشود.

مسئله ۲- تفاوت مزد روزانه دو کارگر ۲۰ ریال است و چون ۳ ریال بر مزد روزانه

هر یک افزوده شود مزد بیشتر ۳ برابر مزد کمتر میشود مزد هر یک چقدر است؟

حل حسابی- میدانیم هرگاه بر کاسته و کاهش یاب مقداری مساوی افزوده شود

مانده تغییر نمیکند پس در حقیقت میخواهیم مسئله زیر را حل کنیم:

تفاوت دو عدد ۲۰ و عدد بزرگتر ۳ برابر عدد کوچکتر است از اینجا معلوم میشود که عدد ۲۰
دو برابر عدد کوچکتر است بنابراین عدد کوچکتر مساوی ۱۰ و عدد بزرگتر ۳۰ میبایست که چون از بزرگ
۲ کم شود مزد روزانه هر کارگر بدست میآید پس

مزد کوچکتر = ۷ ریال مزد بزرگتر = ۲۷ ریال

حل تحیری - چون مزد کمتر را که نمیدانیم x فرض کنیم مزد بیشتر مساوی $x + 20$
میشود حال اگر هر یک ۳ ریال بگیرانیم بنا بر فرض مزد بیشتر سه برابر مزد کمتر میشود یعنی

$$3(x + 20) = x + 20 + 2$$

$$3x + 60 = x + 20 + 2$$

از دو طرف تساوی یک دفعه ۹ و یک دفعه ۲۰ کم کنیم نتیجه میشود

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

و از اینجا

یعنی مزد کمتر ۷ ریال است و بنابراین مزد بیشتر مساوی $7 + 20 = 27$ ریال میشود

۷- از نماینده حل حسابی و جبری این دو مسئله مخصوصاً از حل مسئله دوم می بینید که در حل

هر مسئله برای حساب یک رشته عملی مینماید و اگر برای دانسته انجام میشود که باید از روی فکر

صحیح باشد تا بتوانیم جواب برسیم و عموماً در حل هر مسئله نکته باریکی موجود است که تا آن نکته برخوردیم

مسئله حل نمیشود چنانکه در مسئله دوم ثابت ماندن تفاوت دو مزد گرچه نکته ایست آسان

و بی اهمیت ممکن است متوجه آن نشود و عموماً است که در حل جبری لازم نیست باین نکته توجه شود

در حیر راه حل هر مسئله بر این روش است که صورت مسئله را بکلیت حرفه و نشانه بنویسیم
 و پیش از آن ۹ تا ۱۳ صفحه ۸، و چنانکه دیدیم بکار بردن حرف و نشانه راه حل مسئله را بصورت
 ساده و روشن در آورده و بطلاده و بسید رابطه های ساده از نوشتن عبارتهای دراز و آرد
 دلیل میکا ۴.

بکار بردن حرف برای عمومیت دادن مجامعه ها

۸- گرچه روش بالا بسبب ساده نمودن حل مسئله میشود و با سانی مجهول بدست میآید
 و پانچ مسئله که عددی بیش نیست اثری از علمای که موجب رسیدن به نتیجه شده است موجود نیست
 بعضی که برای حل مسئله های مانند آن باید همه علمای بالا را از سر گرفت و مجهول مسئله بدست آید.
 این نقص را بوسیله بکار بردن حرف از بین برده اند ازین قرار:

مجهولها و همچنین دانسته های یک مسئله را بحرف نمایش داده و مسئله را بحرف دانسته ها
 کلی احرف حل میکنند جواب مسئله که ازین راه بدست میآید عبارتست شامل کلیه علمای که باید در هر
 مقدارهای دانسته انجام شود تا مجهول بدست آید. این عبارت را دستور نامند مانند دستور
 ۱۱، در بهره کاری صفحه ۲۰.

خستین فایده دستور عمومیت دادن به حل یک مسئله کلی است که از روی آن میتوان
 همه مسئله های را که مانند مسئله کلی بوده و فقط در مقدار عددی دانسته با اختلاف داشته باشند
 حل نمود.

برای فهمیدن این مطلب مسئله کلی زیر را حل میکنیم.

مسئله - مجموع دو عدد S و تفاضل آنها d است آنگاه دو عدد کدامند؟
چون عدد کوچکتر را به x و عدد بزرگتر را به y بنامیم این دو تساوی بدست میآید

$$x + y = S$$

$$y - x = d$$

از جمع این دو تساوی خواهیم داشت .

$$2y = S + d$$

$$y = \frac{S+d}{2} \quad \text{و بنابراین} \quad x = \frac{S-d}{2}$$

پس جوابهای مسئله چنین است

$$(۱) \quad \begin{cases} x = \frac{S-d}{2} \\ y = \frac{S+d}{2} \end{cases}$$

یعنی هرگاه مجموع دو عدد x و y مساوی S و تفاضل آنها یعنی

$y - x$ مساوی d باشد y مساویست با نصف $S + d$ و x

مساویست با نصف $S - d$

از روی این دستور میتوان مسئله های مانند مسئله بالا را حل نمود چنانکه اگر مجموع دو عدد

۱۷ و تفاضل آنها باشد آن دو عدد عبارتند از:

$$x = \frac{S-d}{2} = \frac{۱۷-۱}{2} = ۳$$

$$y = \frac{S+d}{2} = \frac{۱۷+۱}{2} = ۱۴$$

۹- فایده های دیگر دستور- بکار بردن دستورهای خبری علاوه بر آنکه بسبب غنویت دادن حل مسئله می گردد فایده های دیگری نیز داراست که در زیر بیان میکنیم.

الف- بکار بردن حرف و نشانه عموماً بسبب اختصار در نوشتن یک قضیه و بخاطر سپردن آن میشود.

مثلاً بجای این که بگوئیم اگر جای سازه داخل، های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند کافی است این رابطه را بخاطر بسپاریم

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

و همچنین بجای این که بگوئیم در ازای محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π کافی است

محیط دایره را بحرانی C و شعاع را بسکی از صفر فاما نند R نموده این دستور را بنویسیم.

$$C = 2\pi R$$

ب- از یک دستور میتوان دستورهای دیگر بدست آورد

مثال- اگر v نمایش تندی ثابت متحرکی در یک زمان باشد و مدت حرکت t اختیار گردد رابی که متحرک پیوسته مساوی s خواهد بود که چون آنرا به e بنامیم دستور زیر بدست می آید

$$(۱) \quad e = vt$$

از این دستور دستورهای

$$(۲) \quad v = \frac{e}{t} \quad \text{و} \quad (۳) \quad t = \frac{e}{v}$$

نتیجه میشود

مثلاً اگر ماشینی با تندی ۲۶ کیلومتر در ساعت مدت ۵ ساعت حرکت کرده باشد

و ای که رفته از دستور (۱) بدست میاید:

$$c = v \cdot t = 26 \times 5 = 130 \text{ کیلومتر}$$

پس چنان که اگر نویسی ۱۶۰ کیلومتر را در ۴ ساعت پیوده باشد تندی آن از دستور (۱) معلوم میشود:

$$v = \frac{c}{t} = \frac{160}{4} = 40 \text{ کیلومتر در ساعت}$$

و وقتی شتر کی مسافت ۴۸ کیلومتر را با تندی ثابت ۶ کیلومتر در ساعت پیوده باشد مدت

حرکتش چنین است

$$t = \frac{c}{v} = \frac{48}{6} = 8 \text{ ساعت و ۲۰ دقیقه}$$

ج - بر سبب ترکیب دو دستور میتوان نتیجه های نهم بدست آورد.

مثلاً اگر c و c' به ترتیب محیط های دو دایره بشعاع R و R' باشد این دو دستور

$$c = 2\pi R$$

داریم:

$$c' = 2\pi R'$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{R}{R'}$$

این تقسیم این دو تساوی چنین نتیجه میشود

یعنی نسبت محیط دو دایره بسبب یکدیگر مساوی نسبت بین شعاع آنها است

پسش های ساده شعاعی

۱- جابجایی زیر را بسبب دستورانی بنایند

الف - S مجموع دو دایره a و b است

ب - تقسیم a بر b حاصل خارج قسمت q باقیانده است

ج- چون در یک برض برض شمار، صورت، و برض نام (مخرج) را در یک عدد ضرب دیا بر یک عدد تقسیم کنیم مقدار برض تغییر میکند

۲- بین دو عدد a و b تساوی زیر برقرار است بر یک از آنها چه معنایی دارد؟

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

۳- تخمین کنید که تساوی بالا صحیح است هر چه باشد a و b

۴- این عبارتها را حساب کنید، قسمة x مادی ۴ و y مادی ۵ باشد

$$\frac{x^2 y}{\sqrt{x+y}} \quad \frac{x^2 y}{\sqrt{x+y}} \quad \frac{5x}{y}$$

$$\frac{2x^2 - y^2}{(y-x)(y+5)}$$

$$\frac{(y+x)^2}{(y+2x-5)^2}$$

تمرین

۱- بر یک از عبارتهای پایین را حساب کنید

$$13 = (16 - 2) + 12 - 5$$

$$6 : 2 + 2$$

$$9 \times 23 - 2 \times 6 - 1 : (5 - 1)$$

$$2^2 (2 + 2) : 1 - 1$$

$$(10 - 3)(16 - 2 \times 2 + 1 : 2)$$

$$1^2 - 5$$

$$3 \times 12 - 6 \times 2 + 12 \times 25 : 2 \times 7 - 3^2 + (5-2)^2$$

۲- مقدار عددی x و y را از روی دستورهای

$$y = m^2 + m - 11 \quad , \quad x = A^2 - 2A - 5$$

پست آورید وقتی که $A = 10$ ؛ $A = 8$ ؛ $A = 5$ باشد

$$m = 12 \quad , \quad m = 10 \quad , \quad m = 15 \quad \text{باشد}$$

۳- عبارت $\sqrt{x-y} - (x-y)$ را حساب کنید

فرض کنید $x = 5$ و $y = 3$ باشد

۴- عبارت

$$\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

جای a و b دو عدد بدخواه گذارده مت مقدار عددی آنرا حساب و تحقیق کنید که مقدارهای

a و b هر چه باشد مقدار عددی این عبارت ۳ است

۵- a و b و c نمایش درازای (طول، پهلو، ضلع نامی یک سه بر دشت)

و S نیمه پیمه امون (محیط) و S نمایش مساحت آن می باشد مطلوبست محاسبه مساحت سه بر دشتی

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{دستور}$$

$$a = 6 \quad b = 5 \quad c = 4.5$$

در حالت های مخصوص زیر

$$a = 6 \quad b = 5 \quad c = 4.5$$

$$a = 7.5 \quad b = 6.5 \quad c = 4.$$

۷- باغی است به شکل مستطیل به ابعاد a و b و پهنای c که دور آن را دیواری به ضخامت d و بلندی e کشیده اند و در میان باغ حوضی است به شکل دایره به شعاع R حساب کنید حجم دیوار و سطح زمین باغ را
اول از روی a و b و c و d و e و R

دوم درین حالت $a = ۱۲۵$ متر $d = ۱۰$ متر $c = ۶۰$ متر $b = ۸۵$ متر $e = ۵$ متر

$R = ۵$ متر $d = ۱۰$ متر $a = ۱۲۵$ متر $c = ۶۰$ متر $b = ۸۵$ متر $e = ۵$ متر

۸- مطلوبت تعیین دستور نخی برای محاسبه دو عدد وقتی که مجموعشان را بدانیم و یکی دو برابر دیگری باشد
مسئله های ۱ تا ۱۳ را به راه حساب و جبر حل نموده و نیز بوسیله تجارب و بدون حرف بجای آید
مسئله دستورهای نخی بدست آورید.

۹- پدری ۵۰ سال دارد و پسرش ۱۴ سال پس از پدر است سال پدر سه برابر سال پسر میشود؟

۱۰- عددی پیدا کنید که $\frac{1}{4}$ آن بعلاوه $\frac{1}{5}$ آن مساوی ۷ باشد.

۱۱- مطلوبت تعیین عدد دو پیکری را وقتی که مجموع دو پیکرش ۹ بوده و چون آنرا از دو انگیزه اش کم کنند عدد ۲۷ بدست آید.

۱۲- شخصی مبلغی از سرمایه اش را از قرار ۵٪ و بقیه را ۴٪ ریال پیش از مبلغی از آن

از قرار ۶٪ بر براج میگذارد و نموده سه ماهه سرمایه دوم ۴۹۴ ریال بیش از نموده سه ماهه سرمایه اول بوده است مطلوبت تعیین مبلغ سرمایه.

۱۳- چه مقدار نقره و نیر و نیر و نیر باید با ۱۵۰۰ گرم شمش بعبار ۸۲۵ ریال آید؟

حاصل ۸۷۵۰ گردود؟

۱۴- مخواسیم مبلغ ۱۵۶۰ ریال را بدو قسمت کنیم بطوریکه یکی از آنها دو برابر دیگری شود.

۱۵- شخصی چند متر پارچه از شتر ۵ متری ۷ ریال خریده و از قرار هر ۷ متری ۱۱ ریال بفروشد.

و بدین ترتیب ۱۸ ریال سود میبرد چند متر پارچه خریده است؟

۱۶- شخصی مدت یک ساعت و ۲۵ دقیقه با سرعتی ثابتی راه میبرد و پس از آن مدت ۱۲ دقیقه با دو

تندی پیش حرکت میکند بر روی بسم ۸۱۷۵ متر راه رفته است. تعیین کنید تندی حرکتش را در مدت

اول و مدت دوم

۱۷- پایاده ای از منزل خود در تهران برای رفتن بیک نقطه ای از شیران ساعت ۵ صبح

حرکت میکند و ساعتی ۴۵۰۰ متر میبرد و پس از نیم ساعت توقف در آن نقطه بر میگردد و در برگشتن بر ساعتی

۶۰۰۰ متری باید و نیم ساعت بعد از ظهر منزل خود میبرد متعین کنید اول فاصله منزل آن شخص را از آن نقطه

دوم و چه ساعتی بمقصد رسیده است!

۱۸- فاصله دو کان زغال ۲۲۰ کیلومتر است هر فرد از زغال در کان نخست ۳۶۶۰ ریال

و در دومی ۴۲۱۰ ریال قیمت دارد که اگر ای برون هر دو فرد از زغال در کیلومتر ۷۵ ریال است

مخواسیم چنان این دو کان کارخانه ای بنا کنیم چه فاصله از کان نخست باید کارخانه ساخته شود

تا زمانی که از این دو کان با نجا میسرند دارای یک قیمت باشد؟

۱۹- پیراهن دوزی برای دو خستین چند دست پیراهن وزیر شکاری ۶۷۵ متر مربع ایک

پارچه نخ لازم دارد و میخواهد پس از خستین بدوزد در صورتیکه بدانیم پهنای این پارچه نخ که در بازار است

میاورد ۸۰ متر است و پس از خسته شدن $\frac{1}{16}$ پهنای آن آب میبرد و معین کنید چند متر

باب نهم در رفع احتیاجش بشود؟

۲۰- دانش آموزی در درس جبر سه مرتبه امتحان میسده در امتحانهای اول و دوم ۱۳ و ۱۵ گرفته

گرفته است میخواهد معدل این سه امتحان ۱۶ شود چه نمره ای باید در امتحان سوم بگیرد؟

۲۱- معدل سه امتحان دانش آموزی ۱۵ است و باید یک امتحان دیگر بدو میخواهد معدل چهار

امتحان ۱۵٫۵ باشد چه نمره ای باید در امتحان چهارم بگیرد؟

۲۲- برای تبدیل F درجه فاهرنهایت (گرما سنج معمول انگلیسی است) به C درجه گرانج

$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

یکصد درجه دستور زیر را بکار میسبرند

پزشکی انگلیسی بیالین بیماری آمد و درجه او را با گرما سنج فاهرنهایت گرفت و ۱۰۲ درجه شد متعین

کند چند درجه (از گرما سنج ۱۰۰ درجه) تب دارد؟

۲۳- پنجم اسلام در سال ۶۲۲ میلادی از مکه به مدینه هجرت کرد. سالهای میلادی بخوبی میشدنی

و تاریخی که در ایران پیش از عصر پهلوی بکار میرفت هجری شمسی بود. در صورتیکه بطور تقریب ۱۰

سال شمسی برابر با ۹۷ سال خورشیدی باشد دستور تبدیل H سال میلادی را به H سال

هجری قمری (بطور تقریب) پیدا کنید.

۲۴- بر حسب تقسیم شاهنامه سوارکاران هر سال در آخرین روز اسب دوانی تهران سه جایزه

به بهترین اسبهای برنده داده میشود. جایزه اسب نخست باید چهار برابر و جایزه دوم دو برابر جایزه

سوم باشد اگر ۱۷۵۰۰ ریال برای سه جایزه تخصیص داده باشند مبلغ هر یک چقدر است؟

۲۵- A ریال را به نسبت 9 و 9 تقسیم کند.

۲۶- دو نفر شریک میخانه باشند K ریال سود را بین خود تقسیم کنند میدانیم سرمایه اولی a ریال در مدت t سال و سرمایه دومی b ریال در مدت t سال در شرکت بوده است سهم هر یک چه میشود؟

$$۲۷- \text{تندی صوت در هوا} \propto \sqrt{\text{شداروی دستور}} \quad ۳۶۵ + ۲۲۳\sqrt{v} = ۳$$

بدست بیاید معین کنید تندی صوت (v) را در هوای ۳۵

۲۸- از روی دستور بالا معین کنید گرمی هوا را بفرض اینکه بدین تندی صوت ۲۳۸ متر

باشد.

۲۹- میدانیم وزن یک جسم مساویست با حاصل ضرب حجم آن جسم در وزن مخصوص او

این قضیه را بوسیله یک رابطه جبری بنویسید ثانیاً اگر وزن جسم را به P و حجم را به V وزن مخصوص را به D بنامیم در حالتی که تغییرات $V = ۱۲$ و $D = ۲.۵$ باشد

وزن آن جسم را حساب کنید و نیز در حالتیکه $P = ۱۲۰$ و $D = ۱.۸$ باشد حجم آن را بدست آورید.

فصل دوم

الف - عدد و جبری

۱- چند یبائی (اکیتهائی) که دارای دو سومی باشند - بیشتر در زندگانی

یجانبه چند یبائی (اکیتهائی) برنجوریم که دارای دو سومی باشند

مثال ۱- دفتر حساب روزانه هر تجارتخانه شامل پولی است که وارد صندوق تجارتخانه

شده و نیز شامل پولها نیست که از طرف تجارتخانه پرداخته شده است گرچه هرگاه مبلغ پولند ولی در معنی با یکدیگر اختلاف کلی دارند.

مثال ۲- از خانه بدپرستان میروید و از دپرستان همان راه را برگزیده اینجا دوراه سادی پیوندهاید ولی یکی شمار بدپرستان نزدیک میکند و دیگری شمار از آن دور مینماید بنا برین این دو مسافت دارای دو سوی مخالفند.

مثال ۳- در سیر شما دو ساعت بطرف مانده است و یا آنکه در شش ساعت از نظر گذشته است این دو مدت نیز دارای دو سوی مخالفند.

۱۱- عدد نائیکه در حساب بکار میرود برای نمودن اینگونه چندها که نیستند

وقتی مجهول یک مسئله از چند یبائی است اکتیث است نمودار باید علاوه بر محاسبه مقدار عددی مجهول نوی آن تعیین کرد.

عددهای حسابی تنها مقدار عددی مجهول را بدست میدهند بدون اینکه نوی آنرا معین کنند و اگر بخوابیم بکلیت عددهای حساب نوی چند یبائی نیز معلوم شود ناچاریم الفاضلی بکار برده جمله بندی کنیم.

مثلاً بجوئیم ۵ ریال بستانکاریم یا ۵ ریال بدکار که دو لفظ بستانکاریم و بدکار نوی چندی را معلوم میکند. بنا برین عددهای حسابی به تنهایی برای نمایش چند یبائیکه دارای دو سوی مخالفند کافی نیست باشد

در جبر برای اندازه گرفتن اینگونه چندینا عددائی درست کرده اند که هم مقدار عددی و هم
شوی چندی را نمایند این عدد با همان عدد های حسابند که بر آنها کلی از دو نشانه + یا -
مقدم شده باشد.

مثال - اگر بطور کلی مبلغ بتانی (طلب) را با بطلاست + و بدی را با بطلاست - بنایم در مثال
پیش بجای اینکه بنویسیم ۵ ریال بستانکاریم کافیست بنویسیم ۵ + ریال و بجای آنکه بنویسیم ۵ ریال
بدکاریم بنویسیم ۵ - ریال

میتوان گفت که دارائی ما ۵ + ریال یا ۵ - ریال میباشد

مثال دیگر - متحرکی از نقطه ۰ واقع بر خط مستقیم xx' حرکت میکند فرض کنیم
۹ متر حرکت کرده باشد بنحوا همسیم معلوم کنیم کجا رسیده است - برای این مقصود باید بدانیم بطرف
 $x' \text{-----} x$
۰

راست ۰ حرکت کرده است یا بطرف چپ.

چنانکه می بینیم عدد ۹ به تنهایی برای تعیین جای متحرک کافی نیست بلکه باید بر این عدد
یکی از دو لفظ بطرف راست یا بطرف چپ را اضافه کرد تا جای متحرک معلوم شود.

حال اگر از ای را که متحرک نسبت راست می پیاید با نشانه + و مخالف آنرا با نشانه -

بنایم و قسمتی بنویسیم ۹ + متحرک ۹ و معلوم میشود که این متحرک در فاصله ۹ متری نقطه ۰ درست

راست آن واقع است همچنین اگر ۹ - متحرک ۹ باشد معنای آن این است که متحرک ۹ متری

در سمت چپ آن رسیده است.

مثال دیگر - اگر سطح اقیانوس را مبدأ ارتفاع فرض کنیم و ارتفاع نقاط بالای آن را
 باشد $+۷۰۰$ و نقاط پایین تر را باشد $-$ بنائیم و قسمتی که بویزند بندی یک نقطه $+۷۰۰$ تراست معلوم
 میشود که آن نقطه ۷۰۰ متر بالاتر از سطح دریا واقع است.

و وقتی تقسیم بندی در بای خزر ۲۰ - تراست معلوم میشود که سطح دریای خزر ۲۰ متر از سطح
 اقیانوس پایین تر است.

مثال دیگر - اگر درجه حرارت مکانی ۱۵ - باشد معلوم میشود که آن مکان ۱۵ درجه سردتر
 از یخی است که در حال آب شدن است.

۱۲ - عدد های جبری - هر عدد حسابی را که نشانه $+$ جلوی آن باشد عدد مثبت
 و هر عدد حسابی را که نشانه $-$ جلوی آن باشد عدد منفی می نامند.

مانند $\frac{۲}{۳} +$ (خوانده میشود بعلاوه دو سوم) و $۷۷ -$ (منهای هشتاد و هفت)

عدد های مثبت و عدد های منفی را عدد های جبری گویند.

۱۳ - عدد های حسابی را قدر مطلق عدد های جبری گویند.

چنانکه ۷۳ قدر مطلق و عدد جبری $۷۳ +$ و $۷۳ -$ است و قرار بر این داده اند که قدر

مطلق عدد جبری α را چنین نویسند $|\alpha|$

پس $|-۲| = ۲$

۱۱ - تساوی دو عدد جبری - دو عدد جبری وقتی مساویند که دارای یک

قدر مطلق و یک نشانه باشد.

۱۵- دو عدد و قرینه - دو عدد جبری که دارای یک قدر مطلقند ممکن است مساوی

نباشند مانند -۷ و $+۷$

هرگاه قدر مطلق دو عدد مساوی ولی نشانه آنها مختلف باشد آن دو عدد را قرینه یکدیگر

گویند مانند -۷ و $+۷$ ؛ $-x$ و $+x$ ؛ -۵ و $+۵$

۱۶- ثابت و عمل نشانه را از جلوی عددهای جبری برداشته آنها را بدون نشانه

نویسند مثلاً بجای $+۵$ و $+۷۳$ و $+۵$ فقط ۵ و ۷۳ و ۵ نویسند.

ولی بچوقت نباید عددهای منفی را بدون نشانه نوشت.

پرسش های ساده شفاهی

۱- شماره شاکردان کلاسی ۲۵ است ۷ نفر آنان غایبند حاضران غایبان را با عدد جبری

بنویسند.

۲- دو متحرک از نقطه o بر خط راستی حرکت مینمایند موضع های این دو متحرک را بوسیله

زینته بندی (مترج نمودن) خط و پسچین فاصله های آن دور از یکدیگر در هر یک از حالت های زیر

مبین کنید:

اولی $+۸$ متر و دومی $+۷$ متر پیونده

• -۱۲ • • • -۹ •

• $+۷$ • • • -۵ •

• -۶ • • • $+۲$ •

اولی - ۳ - متر و ۴ - متر پیوند

۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵

۳ - بلندترین نقطه ای که زمین قد کوه اوست است به بلندی ۸۸۲۰ متر و در فتنه نقطه ای

زمین نقطه ای از ته اقیانوس ساکن است به ژرفای عمیق ۹۵۰۰ متر این و طول را بعد جبری

۴ - گرماسنجی ۱۵ زینه درجه را نشان میدهد - اگر سطح آبگون را بیاوریم در دلی آن ۱۰ زینه

یا ۱۷ زینه یا ۱۵ زینه پائین بیاید چه زینه را نشان خواهد داد؟

۵ - گرماسنجی در ساعت ۷ صبح ۱۰ - زینه را نشان میدهد اگر هر ساعتی که میگذرد سطح آبگون

در دلی آن سه زینه بالا بیاید معین کنید در ساعتی ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صبح چه زینه ای را

نشان خواهد داد؟

۶ - تجارتخانه ای در یکت روز بشیخ پائین داد و ستد نموده است.

خشتین بار - دو دریافتی مبلغ ۴۵۰ ریال و ۳۰۰ ریال داشته است.

بار دوم - ۴۵۰ ریال و ۵۰۰ ریال پرداخته است.

بار سوم - ۶۵۰ ریال پرداخته و ۹۰۰ ریال دریافت داشته است.

بار چهارم - ۳۰۰ ریال دریافت داشته و ۷۵۰ ریال پرداخته است.

بار پنجم - ۲۰۰ ریال دریافت داشته و ۲۰۰ ریال پرداخته است.

از ملا مشاوبت غایب پولهای دریافتی و پرداختی تجارتخانه بعد دای جبری

نمایان بفرماید و ستد را بعد جبری بنماید

ب- جمع عددهای جبری

مثال ۱- باربری در یک روز دو دفعه بار برده است یک دفعه ۵ ریال و یک دفعه ۷ ریال
مزد گرفته ضمناً یک دفعه ۵ ریال و دفعه دیگر ۷ ریال خرج کرده است درآمد و هزینه او را بعد از
جبری بناید.

اگر درآمد را بعد مثبت و هزینه را بعد منفی بنائیم دو عدد $5 + 7 +$ نمانش درآمد
و دو عدد $5 - 7 -$ نمانش هزینه های او میباشد و روشن است که مجموع چند درآمد در آمد
یعنی مجموع چند عدد مثبت عدولست مثبت پس مجموع درآمدهای او یعنی مجموع $5 +$
 $7 +$ عدد $12 +$ خواهد بود یعنی

$$(+5) + (+7) = +12$$

چون مجموع چند هزینه هزینه است بنابراین مجموع چند عدد منفی عدولست منفی
پس مجموع هزینه های او یعنی مجموع دو عدد $5 - 7 -$ و عدد $2 -$ میباشد یعنی

$$(-5) + (-7) = -12$$

ازین مثال قاعده زیر نتیجه میشود:

۱۷- قاعده- مجموع دو یا چند عدد جبری هم نشانه عدولست جبری
که قدر مطلق مساوی مجموع قدر مطلقهای آن چند عدد بود و نشانه آن
با آنها یکی باشد:

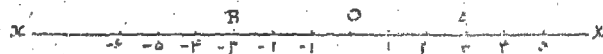
$$(+11) + (+7) = +18$$

$$(-\frac{1}{5}) + (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$$

۱۸- بر روی خط راست xx' دلخواه نقطه ای مانند O برگزیده و از دشت آن نقطه ای مساوی بر این خط جدا می کنیم حال اگر فاصله ای نقطه O را از نقطه ای واقع در



راست آن بعد دشت پنجمه صده ای نقطه O از نقطه ای واقع در سمت چپ بعد منفی نهایش داده خواهد شد مثلاً نقطه ای که فاصله اش از O $+۳$ است نقطه A است نقطه که



فاصله اش -۳ است نقطه B می باشد.

میدانیم که مجموع دو عدد $+۲$ و $+۳$ عدد $+۵$ است - از روی خط زمینه دار بالا، قسم میشود این مجموع را بدین قسم بدست آورده که از نقطه ۲ شروع کرده باندازه سه قطعه سمت راست برویم تا به نقطه ۵ برسیم یعنی $+۲ + (+۳) = +۵$

پسین اگر بخوایم مجموع -۳ و -۴ را حساب کنیم کافیست که از نقطه -۳ شروع کرده ۴ قطعه سمت چپ بشماریم تا به نقطه -۷ برسیم یعنی $-۳ + (-۴) = -۷$

میدانیم تفاضل $۵-۳$ مساوی ۲ است از روی خط بالا هم میتوانیم این عمل تفریق را باین شکل انجام داده که از نقطه ۵ شروع کرده باندازه ۳ قطعه سمت چپ برویم در صورت نقطه ۲ می رسیم همین ترتیب اگر از عدد ۵ بکاهیم ب نقطه ۵ می رسیم - بطور کلی اگر تفریق این قاعده را داریم:

برای کم کردن عدد دشت a از عدد دشت b کافی است از نقطه b شروع

کرده باز از α قطعه بسمت چپ برویم تا بنقطه $\alpha - \beta$ برسیم.
اگر بخوایم مطابق این قاعده عدد α را از β کم کنیم بنقطه $\alpha - \beta$ برسیم یعنی

$$4 - 5 = -1$$

ولی چنانکه میدانیم این تفریق در حساب ممکن نیست زیرا که α بزرگتر از β است و فقط می توان
چهار یک α را از یک β کم کرد و یک یک زیاد است که نمیتوانیم کم کنیم و در حقیقت $\alpha - \beta$ نمیشود
چون یک یک کم نشده است و همچنین در تفریق $4 - 5 = -1$ عدد 4 - نمیشود 5 یک 5 است که نتوانیم
از 4 کم کنیم

مثال - اگر درآمد شخصی 5 ریال هزینه اش 7 ریال باشد گوئیم دارائی او $5 - 7$
یعنی 2 - ریال است - مطابق شرح بالا معنای آن این است که هزینه او 2 ریال بیش از درآمدش
پیش های ساده ششای

بوسیله خط زیندار بالا عمل های زیر را انجام دهیم

$$4 + 3$$

$$6 - 4$$

$$7 - 7$$

$$3 - 2$$

$$4 - 9$$

$$5 - 5$$

متبصره - روشن است که مثلاً برای کم کردن 6 از 15 میتوانیم یک 6 را یکی یکی
از 15 کم کنیم تا به مانده 9 برسیم میتوان نیز یک قسمت از یک 6 را یکی یکی کم کرد تا به
تفریق کرد تا بشود 9 و بعد 2 یک دیگر را از 11 کم کرد تا به 9 برسیم و در هر تفریق میتوان ماند
این مثال عمل کرد

مثلاً برای کم کردن ۱۵ از ۶ اگر مستقیماً عمل کنیم به مانده ۹- برسیم:

$$۶ - ۱۵ = -۹$$

و میتوان مثلاً اول ۶ یکده ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود صفر و بعد ۹ یکده دیگر را از صفر کم کنیم

تا به ۹- برسیم یعنی

$$۰ - ۹ = -۹$$

پس میتوان اول ۷ یکده ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود ۱- و بعد ۸ یکده دیگر را از ۱-

تفریق کرد تا به ۹- برسیم یعنی

$$-۱ - ۸ = -۹$$

و نیز میتوانیم اول ۸ یکده کم کنیم تا بشود ۲- و بعد ۷ یکده دیگر را

مانند اینها

$$-۲ - ۷ = -۹$$

و این تفریق با هم از روی خط زینه دار بالا آسانی انجام میشود. مثلاً برای کم کردن

۷ از ۲- کافیت از نقطه ۲- شروع کرده هفت قیمت بطرف چپ برویم تا به نقطه ۹-

برسیم

پرسش نامی ساده شقای

بر سبزه خط زینه دار بالا عمل نامی زیر را انجام دهید

$$۳ - ۷$$

$$۰ - ۷$$

$$-۳ - ۷$$

$$۲ - ۵$$

$$-۳ - ۲$$

$$۰ - ۵$$

۱۹- چون غرض از کم کردن عدد ۵ از عدد ۷ پیدا کردن عدولست مانند ۷ که چون

با ۵ جمع شود عدد ۷ بدست آید بنا برین از تقریب

$$۲ - ۵ = -۳ \quad \text{نتیجه میشود که} \quad ۲ + (-۳) = -۱$$

$$۲ + (-۵) = -۳ \quad \text{و} \quad -۳ - ۲ = -۵$$

$$۵ + (-۵) = ۰ \quad \text{و} \quad ۰ - ۵ = -۵$$

از تساویهای طرف چپ قاعده زیر بدست میآید:

۲۰- قاعده - مجموع دو عدد جبری که نشانه آنها یکی نیست عدولست

جبری که قدر مطلق مساوی تفاضل قدر مطلقهای آن دو عدد بوده
نشانه اش نشانه عدولست که قدر مطلق بیشتر است

۲۱- نتیجه اول - مجموع دو عدد دترینه صفر است

نتیجه دوم - چون مجموع دو عدد دترینه عدولست که قدر مطلق صفر بوده و علامت

بدخواه + یا - میباشد بنا برین

صفر هم عدولست جبری که میتوان بر آن + یا - مقدم داشت

و یا از ابدون نشانه نوشت

نتیجه ششم - حاصل جمع هر عدد جبری با صفر خود آن عدد است .

مثال ۱- شخصی ۱۵۰ ریال بستانکار است و ۱۲۰ ریال بیکار مبلغ دار مالی

بعد جبری بنساید .

معلوم است که این شخص ۱۲۰ - ۱۵۰ = ۳۰ ریال بستانکار است چون مبلغ بدی و راجعه جبری منفی مبلغ بستانی او را بعد و جبری مثبت بنایم و چون مجموع دو عدد جبری ۱۵۰ + ۱۲۰ = ۲۷۰ قاعده بالا ۳۰ + میشود بنا برین برای تعیین دارائی شخص باید مبلغهای بدی بستانی را که بعد و جبری نموده شده اند با یکدیگر جمع نمود

مثال ۲ - شخصی برخط راستی از مبدأ ۵۰ ۲۷۰ متر بطرف راست حرکت گرفته بود (راه پیموده و بعد ۳۰۰ متر در جهت مخالف رفته میخواهیم بدانیم چه فاصله از نقطه ۵۰ رسیده و در کدام طرف آن واقع است)

بآسانی از روی یک مثل معلوم میشود که این شخص فاصله ۲۷۰ - ۳۰۰ یعنی به ۳۰ متری سمت چپ ۵ رسیده است.

ولی چون دو عدد جبری ۲۷۰ + ۳۰۰ را با هم جمع کنیم از روی قاعده بالا (۲۱) نتیجه میشود

$$(-300) + (+270) = -30$$

بنا برین برای تعیین موضع متحرک باید راههای پیموده شده در جهت های مختلف الی بعد از جبری نموده ایم با هم جمع کنیم

۲۲ - تبصره - درین مثال بجای اینکه متحرک اول ۲۷۰ + متر راه برود و بعد ۳۰۰ -

اگر اول ۳۰۰ - متر برود و بعد ۲۷۰ + متر میرفت بهمان نقطه میرسد یعنی نتیجه یک می شود - پس

$$(+270) + (-300) = (-300) + (+270)$$

یعنی در جمع دو عدد جبری میتوانیم جای آن دو عدد را عوض کنیم بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۳- جمع چند عدد جبری - برای پیدا کردن حاصل جمع عدد های ۲ و ۷ -

و ۸ + ۶ - که بصورت $(-۶) + (+۸) + (-۷) + ۲$ نوشته میشود قرار بر اینست که ابتدا مجموع دو عدد اولی را حساب کرده آنرا با سومی جمع کنیم و بعد حاصل را با چارمی جمع نماییم تا حاصل جمع کل بدست آید.

$$+ ۲ + (-۷) + (+۸) + (-۶) =$$

$$-۵ + (+۸) + (-۶) =$$

$$+۳ + (-۶) = -۳$$

عدد ۳- را مجموع جبری عدد های بالا گویند

۲۴- خواص جمع - الف - چنانکه دیدیم میتوان در جمع دو عدد جبری جای آن دو عدد را تغییر داد و در جمع چند عدد جبری هم میتوان جای آنها را بدو بخوانه تغییر داد مثلاً این تساوی برقرار است

$$۸ + (-۳) + (-۴) = -۴ + (+۸) + (-۳)$$

زیرا از ردی قرار دادیم (۲۳) بترتیب خواهم داشت

$$۸ + (-۳) + (-۴) = ۵ + (-۴) = +۱$$

$$-۴ + (+۸) + (-۳) = +۴ + (-۳) = +۱$$

ب - در جمع چند عدد جبری میتوان بجای دو یا چند عدد آنها مجموع
جبریشان را قرار داد
مثلاًست وی زیر برقرار است

$$(+۸) + [(-۲) + (-۳)] = (-۲) + (+۸) + (-۳)$$

مطابق قرارداد مجموع جبری طرف اول ۲- و طرف دوم مساوی حاصل جمع گرفته است با ۸+
و یا $(+۸) + (-۱۰)$ یعنی ۲-

۲۵- نتیجه ۱- از دو خاصیت بالا نتیجه میشود که در جمع جبری چند عدد میتوان
دو عدد و قرینه را حذف نمود بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۶- نتیجه ۲- میتوان برای محاسبه مجموع جبری چند عدد عددی مثبت و عددی
منفی را جداگانه جمع نمود تا این مجموع مبدل به مجموع دو عدد جبری شود یکی مثبت و یکی منفی مثلاً

$$+۳ + (-۲) + (+۸) + (-۳) + (-۶) =$$

$$+۳ + (+۸) + (-۲) + (-۳) + (-۶) = +۱۲ + (-۱۶)$$

- - ۴

پسیند این قاعده میتوان عمل جمع عددی جبری را تسهیل نمود و آنرا انجام داد

پیش از آن ساده شفافیتی

۱- حاصل جمعی زیر را از روی قاعده های جمع بدست آورده و پسیند خط زیرین را در بند ۱۸

نیز درستی نتیجه را تحقیق کنید.

$$5 + (+2) \quad 5 + (-5) \quad 5 + (-2)$$

$$-3 + (-2) \quad -4 + (-1) \quad -7 + (+1)$$

$$-6 + (+6) \quad -8 + (+9) \quad 0 + (-3)$$

۲- حاصل جمعهای زیر را حساب کنید

$$+\frac{2}{3} + (+\frac{7}{3}) \quad -2,5 + (-3,5)$$

$$+1\frac{2}{5} + (-1\frac{1}{5}) \quad 2,5 + (-5,5)$$

$$-7 + (-2) + (-) \quad (-10) + (+15) + (-5)$$

۳- دانش آموزی در راه خانه بدرسه ۱۵۰ متر از خانه دور میشود و در میان راه ۷۵ متر برگشت

باز ۳۰۰ متر بطرف مدرسه میرود معلوم کنید چقدر فاصله از خانه رسیده است .

۴- شخصی ویدیو دارد یکی ۱۵ ریال و دیگری ۱۰ ریال در عوض ۱۲ ریال بستاند خراست میدهد

دارائی او را تعیین کنید .

۵- سه ساعت به طرز نامده است ۱۵ ساعت دیگر چه ساعتی است و با آن چه ساعت

پیش چه ساعتی بود ؟

۶- در هر یک از تساویهای زیر یک جای خالی است ؟ عدد مناسب بگذارید تا تساوی برقرار باشد

$$5 + ? = 10$$

$$-4 + ? = -7$$

$$-11 + ? = -5$$

$$12 + ? = 3$$

$$8 + ? =$$

$$22 + ? = 6$$

$$۲ + ۲ = -۱۱$$

$$-۸ + ۲ = ۳$$

ج- تشریح عدد های جبری

۲۷- تعریف- چنانکه در حساب دیده ایم غرض از کم کردن عدد جبری ج (کاسته

یا منفوق) از عدد جبری α (کاهش یا منفوق منه) پیدا کردن عدد دست جبری مانند β (مانده) که چون با α جمع جبری شود مجموع مساوی α شود.

$$\alpha - \beta = \alpha$$

و آنرا چنین نویسند

این تعریف همانست که در حساب دیده ایم

مثال-

$$+۳ + (+۴) = +۷ \quad \text{زیرا} \quad +۷ - (+۳) = +۴$$

$$+۷ + (-۴) = +۳ \quad \circ \quad +۳ - (+۷) = -۴$$

$$-۶ + (-۳) = -۹ \quad \circ \quad -۹ - (-۶) = -۳$$

$$+۱۱ + (-۳۰) = -۱۹ \quad \circ \quad -۱۹ - (+۱۱) = -۳۰$$

$$-۱۹ + (+۳۰) = +۱۱ \quad \circ \quad +۱۱ - (-۱۹) = ۳۰$$

پرسش های ساده شفاهی

۱- هر یک از عدد های سمت راست را مطابق تعریف بالا از عدد سمت چپ کم کنید (یعنی در هر یک

از شما که می بینید عددی تعیین کنید که چون با کاسته جمع شود کاهش یاب بدست آید)

$$۵ - ۵ = ۰$$

$$۵ - ۵ = ۰$$

$$۵ - ۵ = ۰$$

$$۷ \text{ از } ۴ - ۵ \text{ از } ۵ - ۵ \text{ از } ۵$$

$$۶ \text{ از } ۵ - ۵ \text{ از } ۵ - ۶ \text{ از } ۵$$

$$۳ \text{ از } ۵ - ۱۵ \text{ از } ۱۱ - ۲ \text{ از } ۵$$

$$۵ \text{ از } ۳ - ۵ \text{ از } ۸ - ۸ \text{ از } ۵$$

۲- در مثالهای بالا نشان دادیم که کاسته را تغییر داده، یعنی اگر a است - دگر است

نموده، با کاهش b جمع کنید و در هر یک از مثالها تحقیق کنید که اینجمله مساوی تفاضل دو عدد مفروض است

۲۸- موافق تعریف تفریق عدد d وقتی مساوی باشد $a - b$ است که

$$b + d = a$$

$$b + d = a$$

اگر بر دو طرف این تساوی قرینه b کاسته را بگیریم نتیجه میشود

$$b + d + (-b) = a + (-b)$$

$$d = a + (-b)$$

یعنی برای بدست آوردن d با $a - b$ کافیست b را کاهش بدهیم

همه کاسته را جمع کنیم

از اینجا قاعده تفهین بدست آمد:

قاعده - برای تفریق دو عدد جبری کافیست قرینه کاسته را با کاهش

جمع کنیم تا مانده بدست آید.

در قسمت ۲ پرسش های بالا مانده دارا از ردی همین قاعده بدست آوردیم .
 ۲۹- از اینجا معلوم میشود که در جبر عمل تفریق تبدیل به جمع میشود بنا برین تفریق دو عدد بزرگ
 همواره ممکن بوده دارای هیچ شرطی نیست و صورتی که در حساب این عمل وقتی ممکن است که کاهش
 یاب بزرگتر از کاهشنده یا دوست کم میباشد و این باشد .

مثال - $-۵ - (+۱۱) = -۵ + (-۱۱) = -۱۶$

$-۵ - (-۵) = -۵ + (+۵) = ۰$

$۰ - (+۳) = ۰ + (-۳) = -۳$

$۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳$

پرسش های ساده شفاهی

هر یک از عددی است راست را موافق قاعده تفریق از عدد سمت چپ کم کنید .

۵ از ۵ - ۵ از ۱۴ ۹ از ۹

۳ از ۸ - ۸ از ۳ ۲۵ از ۲۵

$\frac{۵}{۳}$ از $\frac{۵}{۳}$ - ۹ از -۹ -۱۲ از -۱۴

۲۵ از ۰ - ۶۷۵ از ۰ ۱ از $\frac{۱}{۴}$

$\frac{۱}{۴}$ از $\frac{۱}{۴}$ - ۱۲۵ از ۶۷۵ $\frac{۱۱}{۵}$ از $\frac{۷}{۵}$

۳۰- چون مطابق قاعده های جمع و تفریق و از ردی خط زیننه دار ۱۸ عمل کنیم

خواهیم داشت :

$$5 + (+2) = +7 = 5 + 2$$

$$2 + (-5) = -3 = 2 - 5$$

$$5 - (+2) = 5 + (-2) = 3 = 5 - 2$$

$$-7 - (-1) = -7 + (+1) = -6 = -7 + 1$$

$$0 + (+5) = +5$$

$$0 + (-2) = -2$$

$$0 - (-3) = 0 + (+3) = +3$$

ازین چند مثال فاعده زیر را نتیجه بگیریم :

۳۱- فاعده - دو نشانه پی در پی را اگر یکی باشد میتوان حذف نموده بجای آنها

یک نشانه + گذاشت اگر دو نشانه پی در پی یکی نباشد میتوان بجای آنها یک نشانه -

قرار داد

$$+(+a) = +a$$

یعنی بطور کلی

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

پرسش های ساده شفاف

هر یک از تساوی های این بجای ؟ عددی گذارید تا تساوی برقرار باشد

$$-(+۲) - (+۵) = ۲$$

$$-(+۲) - (-۴) = ۲$$

$$-(-۲) - (-۴) = ۲$$

$$-(-۲) + (-۴) = ۲$$

$$-(-۴) + (-۶) = ۲$$

$$-۵ + ۲ = ۰$$

$$۹ - ۲ = ۷$$

$$-۲ + ۲ = ۰$$

$$-۹ + ۲ = -۷$$

$$-۶ - ۲ = -۸$$

$$۱۳ + ۲ = ۱۵$$

$$-۴ - ۲ = -۶$$

۳۲- هرگاه بخوانیم چند عدد جبری را بایکدیگر جمع کنیم موافق قاعده بالا (۳۱) می آید

کافیت آند دمارا با علامتهای خود دنبال هم بنویسیم مثلاً این مجموع را

$$-۲ + (+۵) + (+۱) + (-۳)$$

میتوان چنین نوشت

$$-۲ + ۵ + ۱ - ۳$$

یعنی نشانه های جمع را نمی نویسیم و فایده این کار اختصار در نوشتن است

پس باید در نظر داشت هرگاه چند عدد جبری دنبال یکدیگر نوشته شده باشند مقصود

اینست که باید آند دمارا با هم جمع نمود.

$$\text{مثال ۱- } +۶ + (-۱) + (-۲) = +۶ - ۱ - ۲ = +۳$$

$$\text{مثال ۲- } ۳ - (-۴) + (-۸) = ۳ + (+۴) + (-۸)$$

$$= ۳ + ۴ - ۸ = -۱$$

در مثال دوم قبلا عمل تفریق (۲-) را متبدل بجمع نمودیم و پس از آن موافق قاعده بالا

حد و ارا را دنبال هم نوشتیم

پیش‌شمارهای شفا

نشانه‌ای جمع و تفریق بین حد و ارای جبری زیر را حذف نموده آنها را بصورت ساده بنویسید و حاصل

هر یک را بدست آورید

$$+(-۲) + (-۵)$$

$$+(-۲) - (-۷)$$

$$-(-۲) + (-۳)$$

$$-(-۵) - (-۱)$$

$$-۲ + (-۳) - (-۴)$$

$$+(-۱) - (-۳) + (-۳)$$

$$-۲ + (-۱) - (+۲) - (-۳) - (-۴)$$

$$-(-۲) + (-۳) - (-۵) - (+۱)$$

$$۲ - (-۱) + (-۲) - (+۱) - (-۲)$$

۳۳- چند جمله عددی - چند جمله عددی عبارتست از چند حد و جبری که بین آنها فقط

نشانه جمع (+) و تفریق (-) یا یکی از آنها باشد.

چنانکه دیدیم هر چند جمله را میتوان مجموع چند حد و جبری تبدیل نمود.

مثلا $(-۳) - (-۱) + (+۱) + (-۵) - ۲$ چند جمله ایست عددی و میتوان از آخرین نو

$$-۲ - ۵ + ۱ + ۳$$

حد و ارای ۲- و ۵- و ۱+ و ۳+ را که باید با یکدیگر جمع نمود جمله‌های این

چند جمله نایم.

و همچنین $۵ - ۴ + ۳ - ۲$ چند جمله ایست که جمله های آن ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

باشد.

۳۴ - بنویسیم دو چند جمله $۱ + ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸$ را با هم جمع کنیم حاصل چیست

پس میتوان چنین نوشت

$$(۱ + ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸) + (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸)$$

چون چند جمله اول مساوی $۶ -$ و دومی مساوی $۴ +$ است پس مجموع آن دو مساوی

$$۴ + ۶ - ۲ = ۸ \text{ است.}$$

حال اگر جمله های این چند جمله را با هم جمع کنیم یعنی دو چند جمله را دنبال هم بنویسیم این

چند جمله

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ - ۱۴ + ۱۵ - ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ + ۱۹ - ۲۰ + ۲۱ - ۲۲ + ۲۳ - ۲۴ + ۲۵ - ۲۶ + ۲۷ - ۲۸ + ۲۹ - ۳۰ + ۳۱ - ۳۲ + ۳۳ - ۳۴ + ۳۵ - ۳۶ + ۳۷ - ۳۸ + ۳۹ - ۴۰ + ۴۱ - ۴۲ + ۴۳ - ۴۴ + ۴۵ - ۴۶ + ۴۷ - ۴۸ + ۴۹ - ۵۰ + ۵۱ - ۵۲ + ۵۳ - ۵۴ + ۵۵ - ۵۶ + ۵۷ - ۵۸ + ۵۹ - ۶۰ + ۶۱ - ۶۲ + ۶۳ - ۶۴ + ۶۵ - ۶۶ + ۶۷ - ۶۸ + ۶۹ - ۷۰ + ۷۱ - ۷۲ + ۷۳ - ۷۴ + ۷۵ - ۷۶ + ۷۷ - ۷۸ + ۷۹ - ۸۰ + ۸۱ - ۸۲ + ۸۳ - ۸۴ + ۸۵ - ۸۶ + ۸۷ - ۸۸ + ۸۹ - ۹۰ + ۹۱ - ۹۲ + ۹۳ - ۹۴ + ۹۵ - ۹۶ + ۹۷ - ۹۸ + ۹۹ - ۱۰۰$$

به دست می آید که چون جمله های آنرا با هم جمع کنیم همان مجموع دو چند جمله بالا یعنی $۲ -$ حاصل

میشود ازین مثال نتیجه بگیریم که:

برای جمع کردن چند جمله با جمله های آنها را دنبال هم نوشته آنها

با هم جمع میکنیم (این قاعده عکس قسمت ب از بند ۲۴ است)

مثال -

$$(-۵ + ۷ - ۹) + (-۶ + ۳) = -۵ + ۷ - ۹ - ۶ + ۳ = -۱۰$$

$$(a-b) + (b-y-a) = a-b+b-y-a = -y$$

۳۵- تعریف - برگاه دو چند جمله S و S' دارای یک عده جمله بود که دو بدو

قرینه هم باشند این دو چند جمله را قرینه یکدیگر گویند مانند

$$S = -2 + 2 - 7 \quad \text{و} \quad S' = 2 - 2 + 7$$

واضح است که مجموع دو چند جمله متضاد صفر است

۳۶- میخواهیم چند جمله $2 - 2 + 2 - 4$ را از چند جمله $5 + 7$ تفریق کنیم تفاضل را

$$\text{میتوان چنین نوشت} \quad (2 - 2 + 2 - 4) - (5 + 7)$$

چون حاصل کاهش $2 +$ و حاصل کاسته -3 است پس تفاضل آن دو مساوی $2 - (-3)$

و یا $2 + 3$ میشود

حال اگر قرینه چند جمله کاسته را بر چند جمله کاهش بیاوریم همان تفاضل بالا بدست میآید

از اینقرار:

$$(-5 + 7) + (2 - 2 + 2 - 4) = 2 + 2 = 4$$

از این مثال نتیجه میگیریم که:

برای تعیین تفاضل دو چند جمله میتوان چند جمله کاهش یا بر قرینه

چند جمله کاسته افزود

مثال -

$$(-2 + 5 - 7) - (-2 + 11 - 1) = -2 + 5 - 7 + 2 - 11 + 1 = -12$$

$$(a-b) - (-b + y + a) = a - b + b - y - a = -y$$

۳۷- برداشتن کذاشتن پرانتز - از مطلب های بالا معلوم میشود که:

اولاً میتوان پرانتز را که در جلوی آن نشانه + است حذف نمود
در این صورت نباید نشانه جمله های آن تغییر کند.

و اگر جلوی پرانتز نشانه - باشد برای برداشتن پرانتز باید نشانه جمله های
داخل را تغییر داد

$$(a + 2 - b - 7) = a + 2 - b - 7$$

$$-(a + 2 - b - 7) = -a - 2 + b + 7$$

ثانیاً بالعکس - همواره میتوان یکجمله را درون پرانتز می که دارای نشانه

+ است نوشت

و نیز میتوان نشانه جمله های یکجمله را تغییر داده آنرا درون پرانتز می که دارای

نشانه - است بنویسیم مثلاً

$$3 - 2 + 5 - 11 + 7 =$$

$$= (3 - 2 + 5) + (-11 + 7) = -(-3 + 2 - 5) - (11 - 7)$$

$$a - b + x - y =$$

$$= (a + x) - (b + y) = -(b - x) - (y - a)$$

پیش های ساده

۱- مجموع تفاضل جمله های $a + b$ و $a - b$ را حساب کنید

پیشدا

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -10 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = +7 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

۲- چند جمله‌ای زیر را مجموع و همچنین تفاضل دو برابر آنرا بنویسید

$$-15 + 2 - 5 + 11$$

$$-a + b - c + d$$

$$x - y - 2 + a + 12$$

$$5x + a - 2x - b$$

$$-15 + x - x + 2$$

$$-20 - a + y - m$$

تمرین

۱- حاصل هر یک از چهار عملی زیر را بدست آورید

$$(+18) + (-9) + (-11) - (-15) - (+2)$$

$$-(-20) - (+5) + (-7) - (-12) + (-15)$$

$$(-2) - [(+2) - (-2) + (-11) - (+2)]$$

$$A = -15 + 2 + 12 - 4$$

$$A = -2 + 2 - 2 + 1 \quad \text{فرض ۲-}$$

حاصل کنید چند جمله‌ای

$$A = -2 + 12 - 2 + 11$$

$$A + A' + A'', A \cdot (A' + A''), A - A' + A''$$

۳- چند جمله‌ای $a^2 - b + c^2$ را درین حالت احساب کنید:

$$a = +۲۵ \quad b = +۷ \quad c = +۱۲$$

$$a = -۲۵ \quad b = -۷ \quad c = -۱۲$$

$$a = +۲۵ \quad b = +۷ \quad c = -۱۲$$

$$a = +۲۵ \quad b = -۷ \quad c = +۱۲$$

$$a = -۲۵ \quad b = -۷ \quad c = +۱۲$$

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را احساب کنید:

$$(۳ - ۷ + ۳) + (۱۸ - ۵ - ۲۱)$$

$$(-۱۰ + ۱۵ - ۲۶) - (-۲۵ + ۱۱ - ۱۵)$$

$$(-۴ + ۷ - ۱۲) - (۳ + ۵ - ۶ - ۲) - (۱۷ - ۱۱ + ۵)$$

$$(۱۵ - ۲ + ۷) - (۲ - ۲ + ۷) - ۱۲$$

۵- از نیمه سده ۱۱۲۰ سال پیش از میلاد و مرد و قبصر ۴۶ سال پیش از میلاد گذشته شد و گمانه در ۱۵۲۲ سال

از میلاد و لیلهای گردش زمین را انتشار داد و جلوس این حضرت پهلوی در ۱۳۰۴ پس از هجرت است و اولین

سنگت بنای دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳ پس از هجرت گذاشته شد. اول هر که ام ازین تاریخ را از بعد از آن

حیرت نمایند و دم تاریخ های سبلاوی را بجهری و یا بکس تبدیل کنند متوم فاصله زمان این تاریخ را در بدو

تاریخ

۶- فسیکه تهران غرامت در پاریس ۲ ساعت و ۱۷ دقیقه بفرمانده است معلوم کنید ۲ ساعت بفرمانده

فهرست مطالب چه حاجتی از تهرانش و تحلیل نداشت ۱۱ بعد از تهرانش مطابق چه ساعتی در پاریس است.

۷- شخصی در ماه اول ۵۰ ریال در صندوق پس انداز میکند و در ماه دوم ۴۰ ریال کمتر و در ماه سوم ۳۰ ریال کمتر و پیش کمتر پس انداز میکند و این کار را تا مدت ۹ ماه میکند اول مبلغ پس انداز این شخص او بر زمین کند و پس انداز منقضی را تعبیر کنید (دوم مبلغ کل پس انداز را پس از مدت ۹ ماه بدست آورید).

۸- ارشدین حکیم ریاضی دان در سال ۲۸۷ پیش از میلاد متولد شد و در سال ۲۱۲ پیش از میلاد درگذشت

حساب کنید چند سال زندگی کرده است

۹- خانه جمشید و خانه خسرو و مدرسه آنها در کوچه راستی واقع است فاصله خانه جمشید از مدرسه ۵۰ قدم و فاصله خانه خسرو از خانه جمشید ۲۷۰ قدم است تعیین کنید فاصله خانه خسرو از مدرسه. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۰- در مسئله بالا بطور کلی اگر فاصله خانه جمشید از خانه خسرو a قدم باشد و خانه جمشید b قدم از مدرسه

فاصله داشته باشد تعیین کنید فاصله خانه خسرو از مدرسه در حالت های مختلف.

۱۱- دبیرستانی در کوچه راستی واقع است و در پیش وایج از این مدرسه بکوچه میانه اولی به متر

و دومی c متر راه میرود بفرش آینه a و b دو عدد جبری باشند اول فاصله آن و نفر حساب

کنید دوم مقدار ای جبری a و b تابع چه شرطی باشند تا این و نفر در یک طرف مدرسه باشد

و یا آنکه در بین آنها باشد سوم اگر مجموع جبری راه آینه رفته باشد صفر باشد چه نتیجه میگیرید و در حالی

فاصله آنها چند رخو است؟

۱۲- گرما سنجی را در دو آبگون داخل کردیم در آبی ۱۵ درجه و در دومی ۲۲- درجه نشان داده است

اختلاف حرارت این دو آبگون چند در است؟

۱۳- درجه صفر گرما سنجی لفظاً معین شده است بقسمی که درجه صفرش مطابق ۳ درجه بالای صفر است اگر این گرما سنج درجه ای ۲۵+ و ۶۳+ و ۵+ و ۳- و ۱۵- را نشان دهد مقدار حقیقی این درجه چقدر است؟

۱۴- اگر صفر گرما سنجی مطابق چهار درجه زیر صفر باشد درین گرما سنج مقدار حقیقی ۴ و ۷۵ و ۱۲۰ و ۲۰- و ۲۰- و ۴۳- را معلوم کنید

۱۵- دو مدرسه که در بازی فوتبال مدرسه با شرکت کرده بودند پس از تمام شدن مسابقه ادلی غده برده بود و ۵ دقیقه پیچ بر پیچ شده و ۳ دقیقه باخته است و ۷ دقیقه برده و ۳ دقیقه پیچ بر پیچ شده و ۵ دقیقه باخته است اگر هر دو دقیقه بر دی یکم داده شود و برای هر دو دقیقه باخته یکم که کم شود بهتر باشد یا هر یک از دو مدرسه را معین کنید.

۱۶- پدری در موقع تولد پسر بزرگش ۲۱ سال دارد و در موقع تولد دخترش ۲۷ سال از دنیا گذشت معین کنید سن دختر را وقتی که سن پسرش سی سال بشود.

۱۷- ساعت جمشید ۱۰ دقیقه جلوتر از ساعت دبیرستان است و ساعت دبیرستان ۵ دقیقه از ساعت شهرداری عقب است اگر ساعت شهرداری نمره نشان دهد ساعت جمشید و ساعت دبیرستان هر یک چه وقتی را معین می کنند؟

۱۸- در شهری سه ساعت است شخصی در زمین گردش می بیند که هر سه ساعت یک موقع را نشان بدهد و هر یک از ساعت اول تا ساعت دوم ۱۵ دقیقه در راه بوده و از ساعت دوم تا ساعت سوم ۱۱ دقیقه راه پیاده است و ساعت خود را ۱۸ دقیقه از ساعت سومی عقب است اگر ساعت دوم صحیح باشد هر یک از این

چشمگیری باید داد؟

۱۹- شخصی پیشوازی از دهستان ۱۳ دقیقه پیش از رسیدن ترن وارد ایستگاه راه آهن شد و خبر دادند که ترن ۲۷ دقیقه دیرتر از موقع مقرّر خواهد رسید اگر ترن متوالست ۱۷ دقیقه زودتر برسد چقدر باید قطر شود؟

۲۰- تری از ایستگاه با ۲۰ نفر مسافر درجه اول و ۸۵ مسافر درجه دوم و ۱۱۵ مسافر درجه سوم حرکت میکند در اولین ایستگاه از درجه اول ۵ نفر و از درجه دوم ۲۷ نفر و از درجه سوم ۴۰ نفر خارج میشوند و در عوض ۸ مسافر درجه اول و ۱۵ مسافر درجه دوم و ۴۴ مسافر درجه سوم سوار میشوند در ایستگاه دوم ازین سه درجه تریب ۱۹ و ۴۸ و ۵۹ نفر پائین میآیند و ۴ نفر درجه اول و ۱۵ نفر درجه دوم و ۲۹ نفر درجه سوم سوار میشوند و در ایستگاه سوم همه خارج میشوند معین کنند در ایستگاه سوم از هر درجه چند نفر خارج شده است؟

۲۱- نخستین انشمندهی که کتاب جبر و مقابله نوشته محمد سپهر موسی خوارزمی است که ایرانی و سال ۲۷۲ هجری شمسی فوت کرده است و نخستین از یونانی که جبر را بصورت کنونی درآورد و دکارته Descartes فرانسوی است که در ۱۵۶۶ به دنیا آمده معلوم کنید او تا چند سال پیش از عالم ادبانی بگذر ایرانی جبر و مقابله را نوشته ثانیاً چند سال پیش خوارزمی میزیسته؟

و- ضرب عدد دهمای جبری

۳۸- در حساب مقصود از ضرب عدد $ج$ در $د$ جمع عددانی است که بر یک دهمای

$د$ برده و شماره آن عددان باشد از آن شماره یک دهمای $ج$ باشد.

مانند ۴×۲ یعنی $۴ + ۴$ یا ۸

ما این تعریف را در ضرب عدد های جبری عمومیّت میدهم ازین قرار:

در جبر مقصود از ضرب عدد مثبت در عدد جبری α جمع عدد های مثبت که برابر مساوی بوده و شماره آنها باندازه شماره یک های قدر مطلق آن عدد مثبت باشد

و مقصود از ضرب عدد منفی در عدد جبری α تفریق کردن عدد های مثبت که برابر مساوی بوده و شماره آنها باندازه شماره یک های قدر مطلق آن عدد منفی باشد

مثال ۱- مقصود از $(+۲) \cdot (+۴)$ جمع عدد ۴ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(+۲) \cdot (+۴) = (+۴) + (+۴) = +۸ = +(۲ \times ۴)$$

مثال ۲- مقصود از $(+۲) \cdot (-۴)$ جمع عدد ۴ - است دو مرتبه.

بنابراین

$$(+۲) \cdot (-۴) = (-۴) + (-۴) = -۸ = -(۲ \times ۴)$$

مثال ۳- مقصود از $(-۲) \cdot (+۴)$ تفریق عدد ۴ + است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۲) \cdot (+۴) = -(+۴) - (+۴) = -۸ = -(۲ \times ۴)$$

مثال ۴- مقصود از $(-۲) \cdot (-۴)$ تفریق عدد ۴ - است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۲) \cdot (-۴) = -(-۴) - (-۴) = +۸ = +(۲ \times ۴)$$

ازین چند مثال این قاعده کلی برای ضرب دو عدد جبری بدست میآید:

۳۹- قاعده - حاصل ضرب دو عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن دو عدد میباشد نشانه آنست وقتی که آن دو عدد هم نشانه باشند و گرنه - است.

از روی قاعده بالا نشانه حاصل ضرب بطور خلاصه چنین است:

+	=	+	در	+
-	=	+	در	-
-	=	-	در	+
+	=	-	در	-

هر یک از دو عددی را که در هم ضرب میشوند سازه مینامند

۴۰- نتیجه - از فرم ۳۸ معلوم میشود که حاصل جمع n سازه مساوی برابر حاصل

ضرب عدد n است در آن سازه

$$(-x) + (-x) + (-x) = (-x) \cdot ۳$$

مثال در تحقیق درستی قاعده بالا - اتوبوسی بر جاده راست xx

در هر ساعت ۳۰ کیلومتر راه می پیماید و هر نقطه ۵ می رسد میخواسیم موضع این اتوبوس را

روی این جاده دو ساعت پیش از ظهر یا دو ساعت بعد از ظهر تعیین کنیم یعنی بوسیله عددی جبری

هم فاصله اتوبوس را از ۵ بدست بیاوریم و هم معین کنیم در کدام طرف ۵ واقع است

$$x \xrightarrow{\quad A \quad \quad \quad B \quad} x$$

0

معلوم است فاصله اتوبوس از ۵۰ کیلومتر است باید معلوم کنیم در کدام سمت ۵ واقع است

بلافاصله قرار دادیم که راههای پیچیده شده بسوی راست مثبت و راههای پیچیده شده بسوی چپ منفی باشد همچنین انتخابی پیش از ظهر را منفی و زمان بعد از ظهر را مثبت اختیار میکنیم و هر ۲۰ کیلومتر را روی خط x بیک ساعتی متر نشان میدهم و دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول اتوبوس بسوی راست میرود - باینرا را بیکد و یک ساعت

می پاید بعد بدست مثبت مساوی ۳۰ + چون قطره ۵ میرسد پس دو ساعت پیش از ظهر به وضع A در طرف چپ ۵ فاصله ۲۰ کیلومتر رسیده است حال اگر اندازه جبری OA را به OA نایم نتیجه میشود $\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

چون قطره ۵ رسیده پس در دو ساعت بعد از ظهر به نقطه B که فاصله ۶۰ کیلومتر

از ۵ و در طرف راست است میرسد یعنی $\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

اگر بطور کلی برای بدست آوردن راه بیکد متحرک پیچیده دستور $e = vt$ (نمره ۹)

قیمت v را بکار ببریم و در آن t و e را عدد های جبری بگشاییم نتیجه بالا را بدست بیاوریم از بنظر قرار:

در دو ساعت پیش از ظهر خواهیم داشت

$$e = \overline{OA} = (+۳۰) \cdot (-۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

در دو ساعت بعد از ظهر

$$e = \overline{OB} = (+۲۰) \cdot (+۲) = +۶۰ \text{ کیلومتر}$$

حالت دوم اتوبوس می چپ می رود - بنابراین را بیکه در یک ساعت می پیماید

عددیست منفی مساوی ۳۰ - پس در دو ساعت پیش از ظهر موضع B در طرف است O و فاصله

$$\overline{OB} = +۶۰ \text{ کیلومتر یعنی}$$

در دو ساعت بعد از ظهر A که در سمت چپ O و فاصله ۶۰ کیلومتر است رسیده یعنی

$$\overline{OA} = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

از روی دستور هم همین نتیجه گرفته میشود:

در دو ساعت پیش از ظهر

$$e = \overline{OB} = (-۲۰) \cdot (-۲) = +۶۰ \text{ کیلومتر}$$

در دو ساعت بعد از ظهر

$$e = \overline{OA} = (-۲۰) \cdot (+۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

پریش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

$$+۵ \text{ در } +۲ \text{ ; } +۶ \text{ در } -۴ \text{ ; } +۱ \text{ در } -۱۱$$

$$-۵ \text{ در } -۲ \text{ ; } -۵ \text{ در } ۱۶ \text{ ; } -۹ \text{ در } ۵$$

$$-۳ \text{ در } ۱۱ \text{ ; } -۱۱ \text{ در } -۵ \text{ ; } ۵ \text{ در } -۲$$

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & & 1 & & -8 & & -1 \\ & & & & & & 8 \\ & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & 11 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & -1,5 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1,5 \end{array}$$

۴۱- تحقیق کنید که این تساویها برقرار است.

$$(+3)(+5) = (+5)(+3)$$

$$(+4)(-7) = (-7)(+4)$$

$$(-2)(+6) = (+6)(-2)$$

$$(-8)(-4) = (-4)(-8)$$

از اینجا معلوم شود:

حاصل ضرب دو عدد جبری بستگی بجای آن دو عدد ندارد.

$$ab = ba$$

یعنی بطور کلی

۴۲- از اینکند مطلق حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب در مطلقهای سازدهای ضرب

نتیجه می شود که:

حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر است

$$0 \times a = a \times 0 = 0$$

یعنی

و بکس هرگاه حاصل ضرب صفر باشد حتماً یکی از سازدهای آن صفر است.
بنابراین: شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضربی صفر باشد اینست که دست
کم یکی از سازدهای آن صفر باشد

و همچنین از ضرب هر عدد در ۱- قرینه آن عدد بدست می آید و بعکس هر عدد مساوی حاصل ضرب ۱- در قرینه آن عدد است.

$$-1 \times x = x \times (-1) = -x \quad \text{یعنی}$$

۴۳- تحقیق کنید این تساویها برقرار است.

$$(+3) \cdot (+5) = - [(-2)(+5)] = - [(+2)(-5)]$$

$$(-4)(+7) = - [(+4)(+7)] = - [(-4)(-7)]$$

$$(-2)(-9) = - [(+2)(-9)] = - [(-2)(+9)]$$

$$(-6)(+11) = (+6)(-11)$$

$$(-5)(-2) = (+5)(+2)$$

از اینجا معلوم میشود که:

اگر نشانه یکی از دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر میکند

$$xy = - [(-x)y] = - [x(-y)] \quad \text{یعنی بطور کلی}$$

بنابر این اگر نشانه هر دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر نمیکند

$$xy = (-x)(-y) \quad \text{یعنی}$$

۴۴- حاصل ضرب چند عدد جبری - حاصل ضرب چند عدد جبری بدین شکل است

می آید که دو سازه اول و دوم را در هم ضرب نموده حاصل را در سازه سوم ضرب میکنیم و اینجا ضرب را در سازه چهارم و همین ترتیب عمل میکنیم تا حاصل ضرب این چند عدد بدست آید

مثال -

$$(-4)(+2)(-5) = (-8)(-5) = +40$$

$$(+2)(-2)(+2)(+5) = (-6)(+7)(+5)$$

$$= (-42)(+5) = -210$$

پیش‌های ساده

حاصل ضرب‌های زیر را بدست آورید

$$(-2)(-3)(-1)$$

$$(+2)(+3)(+1)$$

$$(-1)(-7)(-3)(-1)$$

$$(-3)(+5)(-2)$$

$$(+2)(-1)(-5)(+1)$$

$$(-2)(-9)(-5)(+1)$$

$$(-1)(+7)(-11)(+)(-8) \quad (-5)(+4)(-3)(+1)(+)$$

۱۴۵- در هر یک از مثال‌های بالا تخفیف کنید که اگر جای سازه‌های ضرب را

تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمی‌کند

۱۴۶- از مثال‌های بالا معلوم می‌شود که اگر شماره سازه‌های منفی جفت یا

باشد نشانه حاصل ضرب + است و گرنه نشانه - است.

از دو خاصیت بالا قاعده زیر برای ضرب چند عدد جبری نتیجه می‌شود:

قاعده - حاصل ضرب چند عدد جبری عددیست جبری که قدر

مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و

نشانه‌اش + است اگر شماره سازه‌های منفی جفت و یا صفر باشد و گرنه

- خواهد بود

۴۷- نتیجه- هرگاه یکی از سازده ها صفر باشد حاصل ضرب صفر میشود

۴۸- تحقیق کنید که نشانه های زیر درست است.

$$[(-2)(+5)] \cdot (+3) = [(-2)(+3)] \cdot (+5)$$

$$= [(+5)(+3)] \cdot (-2)$$

$$[(-1)(-3)(+2)](-2) = [(-1)(-2)](-3)(+2)$$

$$= [(-3)(-2)](-1)(+2)$$

$$= [(+2)(-2)](-3)(-1)$$

از اینجا نتیجه بگیریم که برای ضرب یک عدد در حاصل ضرب چند عدد کافی است
الغدر را در یکی از آن چند عدد ضرب کرده و از روی قاعده حاصل
ضرب را بدست آورد

$$(abc) \cdot x = (ax) \cdot bc = (bx) \cdot ac = (cx) \cdot ab$$
 یعنی

پرش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

$$abc \text{ وقتی که } a = -2 \text{ و } b = -5 \text{ باشد}$$

$$abc \text{ ، } a = +2 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = 0$$

$$5xy \text{ ، } x = -5 \text{ و } y = -1$$

$$y = -2, \quad x = -2, \quad \alpha = 1 \quad \text{دقیق}$$

$$y = +2, \quad x = +2, \quad \alpha = -1 \quad "$$

$$y = +2, \quad x = +2, \quad \alpha = +1 \quad "$$

$$y = 0, \quad x = 0, \quad \alpha = -2 \quad "$$

۴۹- اول معنای این تساویها را بیان کنید

$$5(-2+2) = 5(-2) + 5(+2)$$

$$-2(-1+2-2) = (-2)(-1) + (-2)(+2) + (-2)(-2)$$

$$(-5-2+7)(-9) = (-5)(-9) + (-2)(-9) + (+7)(-9)$$

دوم تحقیق کنید که تساویهای بالا درست است

از مثالهای بالا چنین برآید:

برای تعیین حاصل ضرب یک عدد جبری در مجموع چند عدد میتوان
العدد جبری را در هر یک از جمله های مجموع ضرب نموده حاصل ضربهای
جزء را با هم جمع جبری نمود.

$$(a-b+c) m = am - bm + cm \quad \text{یعنی}$$

۵۰- میخواهیم مجموع جبری (۳-۴) را در مجموع جبری (۱-۲+۵) ضرب کنیم

مستقیماً این حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ۱- در ۲+ است که مساوی ۲- میشود
نیز میتوان یکی ازین دو مجموع (مثلاً مجموع دوم) را یک عدد فرض نموده مطابق فرم ۴۹ ضرب

کردار شفیقانه:

$$(-r + \Delta - 1)(r - r^2) = (-r + \Delta - 1)(+r) + (-r + \Delta - 1)(-r^2)$$

محرف اوم را نیز میتوان مطابق نمره ۴۹ به داد و باریج حاصل ضرب چنین میشود

$$(-2 + \Delta - 1)(r - y) =$$

۲۴

$$(-r)(+r) + (+d)(+r) + (-1)(+r) + (-r)(-r) + (+d)(-r) + (-1)(-r) =$$

-9 + 10 + -2 + 1 + -1 + 1

$$1 = -\tau\eta + \tau\gamma = -\tau$$

محکم دلائل سے مزین متنوع و منفرد موضوعات پر مشتمل مفت آن لائن مکتبہ

$$(\vec{a}, b, \vec{c}) \cdot (x, y) = (a, b, c) \cdot x + (a, b, c) \cdot (-y)$$

$$= ax + bx - cx - ay - by + cy$$

پیش نامی ساده

۱- حاصل ضربهای زیر را از دو راه بدست آورید

فمنه $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 1$, $g = 1$, $h = 1$, $i = 1$, $j = 1$, $k = 1$, $l = 1$, $m = 1$, $n = 1$, $o = 1$, $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$, $u = 1$, $v = 1$, $w = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $aa = 1$, $ab = 1$, $ac = 1$, $ad = 1$, $ae = 1$, $af = 1$, $ag = 1$, $ah = 1$, $ai = 1$, $aj = 1$, $ak = 1$, $al = 1$, $am = 1$, $an = 1$, $ao = 1$, $ap = 1$, $aq = 1$, $ar = 1$, $as = 1$, $at = 1$, $au = 1$, $av = 1$, $aw = 1$, $ax = 1$, $ay = 1$, $az = 1$, $ba = 1$, $bb = 1$, $bc = 1$, $bd = 1$, $be = 1$, $bf = 1$, $bg = 1$, $bh = 1$, $bi = 1$, $bj = 1$, $bk = 1$, $bl = 1$, $bm = 1$, $bn = 1$, $bo = 1$, $bp = 1$, $bq = 1$, $br = 1$, $bs = 1$, $bt = 1$, $bu = 1$, $bv = 1$, $bw = 1$, $bx = 1$, $by = 1$, $bz = 1$, $ca = 1$, $cb = 1$, $cc = 1$, $cd = 1$, $ce = 1$, $cf = 1$, $cg = 1$, $ch = 1$, $ci = 1$, $cj = 1$, $ck = 1$, $cl = 1$, $cm = 1$, $cn = 1$, $co = 1$, $cp = 1$, $cq = 1$, $cr = 1$, $cs = 1$, $ct = 1$, $cu = 1$, $cv = 1$, $cw = 1$, $cx = 1$, $cy = 1$, $cz = 1$, $da = 1$, $db = 1$, $dc = 1$, $dd = 1$, $de = 1$, $df = 1$, $dg = 1$, $dh = 1$, $di = 1$, $dj = 1$, $dk = 1$, $dl = 1$, $dm = 1$, $dn = 1$, $do = 1$, $dp = 1$, $dq = 1$, $dr = 1$, $ds = 1$, $dt = 1$, $du = 1$, $dv = 1$, $dw = 1$, $dx = 1$, $dy = 1$, $dz = 1$, $ea = 1$, $eb = 1$, $ec = 1$, $ed = 1$, $ee = 1$, $ef = 1$, $eg = 1$, $eh = 1$, $ei = 1$, $ej = 1$, $ek = 1$, $el = 1$, $em = 1$, $en = 1$, $eo = 1$, $ep = 1$, $eq = 1$, $er = 1$, $es = 1$, $et = 1$, $eu = 1$, $ev = 1$, $ew = 1$, $ex = 1$, $ey = 1$, $ez = 1$, $fa = 1$, $fb = 1$, $fc = 1$, $fd = 1$, $fe = 1$, $ff = 1$, $fg = 1$, $fh = 1$, $fi = 1$, $fj = 1$, $fk = 1$, $fl = 1$, $fm = 1$, $fn = 1$, $fo = 1$, $fp = 1$, $fq = 1$, $fr = 1$, $fs = 1$, $ft = 1$, $fu = 1$, $fv = 1$, $fw = 1$, $fx = 1$, $fy = 1$, $fz = 1$, $ga = 1$, $gb = 1$, $gc = 1$, $gd = 1$, $ge = 1$, $gf = 1$, $gg = 1$, $gh = 1$, $gi = 1$, $gj = 1$, $gk = 1$, $gl = 1$, $gm = 1$, $gn = 1$, $go = 1$, $gp = 1$, $gq = 1$, $gr = 1$, $gs = 1$, $gt = 1$, $gu = 1$, $gv = 1$, $gw = 1$, $gx = 1$, $gy = 1$, $gz = 1$, $ha = 1$, $hb = 1$, $hc = 1$, $hd = 1$, $he = 1$, $hf = 1$, $hg = 1$, $hh = 1$, $hi = 1$, $hj = 1$, $hk = 1$, $hl = 1$, $hm = 1$, $hn = 1$, $ho = 1$, $hp = 1$, $hq = 1$, $hr = 1$, $hs = 1$, $ht = 1$, $hu = 1$, $hv = 1$, $hw = 1$, $hx = 1$, $hy = 1$, $hz = 1$, $ia = 1$, $ib = 1$, $ic = 1$, $id = 1$, $ie = 1$, $if = 1$, $ig = 1$, $ih = 1$, $ii = 1$, $ij = 1$, $ik = 1$, $il = 1$, $im = 1$, $in = 1$, $io = 1$, $ip = 1$, $iq = 1$, $ir = 1$, $is = 1$, $it = 1$, $iu = 1$, $iv = 1$, $iw = 1$, $ix = 1$, $iy = 1$, $iz = 1$, $ja = 1$, $jb = 1$, $jc = 1$, $jd = 1$, $je = 1$, $jf = 1$, $jj = 1$, $jh = 1$, $ji = 1$, $jk = 1$, $jl = 1$, $jm = 1$, $jn = 1$, $jo = 1$, $jp = 1$, $jq = 1$, $jr = 1$, $js = 1$, $jt = 1$, $ju = 1$, $jv = 1$, $jw = 1$, $jx = 1$, $jy = 1$, $jz = 1$, $ka = 1$, $kb = 1$, $kc = 1$, $kd = 1$, $ke = 1$, $kf = 1$, $kg = 1$, $kh = 1$, $ki = 1$, $kj = 1$, $kk = 1$, $kl = 1$, $km = 1$, $kn = 1$, $ko = 1$, $kp = 1$, $kq = 1$, $kr = 1$, $ks = 1$, $kt = 1$, $ku = 1$, $kv = 1$, $kw = 1$, $kx = 1$, $ky = 1$, $kz = 1$, $la = 1$, $lb = 1$, $lc = 1$, $ld = 1$, $le = 1$, $lf = 1$, $lg = 1$, $lh = 1$, $li = 1$, $lj = 1$, $lk = 1$, $ll = 1$, $lm = 1$, $ln = 1$, $lo = 1$, $lp = 1$, $lq = 1$, $lr = 1$, $ls = 1$, $lt = 1$, $lu = 1$, $lv = 1$, $lw = 1$, $lx = 1$, $ly = 1$, $lz = 1$, $ma = 1$, $mb = 1$, $mc = 1$, $md = 1$, $me = 1$, $mf = 1$, $mg = 1$, $mh = 1$, $mi = 1$, $mj = 1$, $mk = 1$, $ml = 1$, $mm = 1$, $mn = 1$, $mo = 1$, $mp = 1$, $mq = 1$, $mr = 1$, $ms = 1$, $mt = 1$, $mu = 1$, $mv = 1$, $mw = 1$, $mx = 1$, $my = 1$, $mz = 1$, $na = 1$, $nb = 1$, $nc = 1$, $nd = 1$, $ne = 1$, $nf = 1$, $ng = 1$, $nh = 1$, $ni = 1$, $nj = 1$, nk

$$b = -1, a = 1, x = -1, \dots, x(a-b)$$

$$x(a + b - f)$$

$$a = -1, y = -1, z = 1 \quad \bullet \quad -11(x - y)(-a)$$

$$b = -1, a = 1 \quad \therefore (a-b)(a+b)$$

فکند $(a-b)(a+b)$ $b = -2$; $a = 2$

$b = 2$; $a = -2$

$y = -2$; $x = 2$; $b = -1$; $a = 1$ $a(a+b-1)(x-y)$

$y = 1$; $x = 0$; $b = 0$; $a = 0$

۲- دو مسافر از شهری به بند بنای ۵ کیلومتر و مسافت ۲۵ کیلومتر و مسافت حرکت

میکنند بخوابیم فاصله آنها را پس از ۲ ساعت ۲۵ دقیقه حساب کنیم و صورتیکه اولاً جهت
شان را در دو جهت مختلف حرکت کنند

ه- تقسیم دو عدد جبری

۵۱- غرض از تقسیم عدد جبری a (مقسوم) بر عدد جبری b (مقسوم علیه) پیدا کردن

عدد دیت جبری q خارج قسمت بطوریکه حاصل ضرب b و q مساوی a شود و آنرا

چنین نویسیم

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

$$a = bq$$

بنابراین بالا معلوم میشود که

مثال

$$+ 8 = (+2)(+4)$$

زیرا

$$\frac{+8}{+2} = +4$$

$$+ 10 = (-2)(-5)$$

$$\frac{+10}{-2} = -5$$

$$- 12 = (+4)(-3)$$

$$\frac{-12}{+4} = -3$$

$$+٣ = \frac{-٢٤}{-٤} \quad \text{زیرا } (٢١) + (-٦) = -٢٤$$

پیش‌های ساده

خارج‌قیمت‌های زیر را حساب کنید

١	بر	٢	ز	٩	بر	-٣	ز	-٩	بر	٢
-١٥	٠	-٥	ز	+١٥	٠	-٥	ز	-١٥	٠	+٥
+٣٦	٠	-٩	ز	-٣٦	٠	-٩	ز	-٣٦	٠	+٩
-٥	٠	٦	ز	-٥	٠	-٦	ز	٥	٠	-٦
٣	٠	-١	ز	١	٠	-٣	ز	-١	٠	+٣

۵۲- از مثال‌های بالا معلوم شود:

اولاً قدر مطلق خارج قیمت مساوی خارج قیمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه است

ثانیاً نشانه خارج قیمت + است وقتی که مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه (بر و مثبت یا بر و منفی)،

باشند و - است وقتی که دارای نشانه مختلف (یکی مثبت و دیگری منفی) باشند

و نیز می‌توان از روی تساوی $٥ = ٦$ همین نتیجه را گرفت:

اگر ٥ و ٦ دارای یک نشانه باشند نشانه ٥ باید + باشد تا نشانه حاصل ضرب یعنی ٦

مان نشانه ٥ شود و اگر نشانه ٥ و ٦ یکی نباشد همین دلیل باید ٥ منفی باشد

بنابراین برای تقسیم دو عدد جبری این قاعده را خواهیم داشت:

قاعده - خارج قیمت عدد جبری ٥ بر عدد جبری ٦ عدد ٣ است

جبری مانند α بقسمی که قدر مطلق مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم α بر قدر مطلق مقسوم علیه β باشد و نشانه اش $+$ است اگر مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه باشند و $-$ است اگر نه.

برای یافتن نشانه خارج قسمت از روی قاعده بالا بطور خلاصه میتوان نوشت:

$$\begin{array}{rcl} + & = & + \text{ بر } + \\ - & = & - \text{ بر } - \\ - & = & + \text{ بر } - \end{array}$$

۵۳- حالت خاصی مخصوص $-$ نخست $-$ اگر مقسوم علیه مساوی $+$ باشد خارج قسمت مساوی مقسوم میشود ببارت دیگر خارج قسمت هر عدد بر یک مساوی خود آنگاه است

$$- \alpha : + 1 = \frac{-\alpha}{+1} = -\alpha$$

یعنی دوم- اگر مقسوم مساوی صفر و مقسوم علیه مخالف صفر باشد خارج قسمت صفر میشود

زیرا از $\alpha = 0$ معلوم میشود که هرگاه $\alpha = 0$ و $\beta \neq 0$ باشد

چون طرف اول صفر است و چهار طرف دوم نیز مساوی صفر بوده و از آنجا β باید صفر باشد سوم- اگر مقسوم علیه صفر و مقسوم مخالف صفر باشد تقسیم محال است

زیرا خارج قسمت را بر عددی فرض کنیم چون حاصل ضربش در صفر مساوی صفر میشود بنابراین میتوانیم
مساوی مقسوم که صفر نیست باشد.

تجربه - از آن دیبای $2 = \frac{2}{1}$ و $20 = \frac{20}{1}$ و $200 = \frac{200}{1}$ و ... معلوم می شود که هر

قدر مطلق مقسوم علیه کوچک است شود قدر مطلق خارج قسمت بزرگ میشود و چون قدر مطلق صفر از قدر مطلق نام غذا کوچکتر است بنابراین

قدر مطلق خارج قسمت بر عدد بر صفر از قدر مطلق نام عدد بزرگتر میشود و چون چنین عددی را نمیتوان معین کرد از آن

بجاست صفر نایس داده اند و آنرا بی نهایت گویند.

۵۴ - عکس یک عدد - عکس یک عدد مساوی خارج قسمت ۱ + است برای

چنانکه عکس عدد ۴ - عدد $\frac{1}{4}$ - است و بطور کلی $\frac{1}{a}$ عکس عدد a میباشد

از روی این تعریف معلوم میشود که:

حاصل ضرب هر عدد در عکس خود مساوی ۱ + است

۵۵ - درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید

$$\frac{-24 \times 3}{8} = \frac{-24}{8} \times 3 \quad \text{و} \quad \frac{-20 \times 4}{5} = \frac{-20}{5} \times 4$$

$$\frac{+18 \div (-2)}{-3} = \frac{+18}{-3} \div (-2) \quad \text{و} \quad \frac{-36 \div (-3)}{-4} = \frac{-36}{-4} \div (-3)$$

$$\frac{48}{(-6) \times 2} = \frac{48}{-6} \div 2 \quad \text{و} \quad \frac{-40}{3 \times (-5)} = \frac{-40}{3} \div (-5)$$

$$\frac{-27}{(-9) \div (-2)} = \frac{-27}{-9} \times (-2) \quad \text{و} \quad \frac{-36}{-12 \div 3} = \frac{-36}{-12} \times 3$$

$$\frac{+30 \div 2}{-54 \div 2} = \frac{+30}{-54} \quad \text{و} \quad \frac{-12 \div (-3)}{-6 \div (-3)} = \frac{-12}{-6}$$

از این تساویها میتوان خاصیت های زیر را نوشت:

۵۶- نخست - هرگاه مقسوم در عددی ضرب شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۵۷- دوم - هرگاه مقسوم بر عددی تقسیم شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۸- سوم - هرگاه مقسوم علیه در عددی ضرب شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۹- چهارم - هرگاه مقسوم علیه بر عددی تقسیم شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۶۰- پنجم - هرگاه مقسوم و مقسوم علیه در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند خارج قسمت تغییر نکند.

۶۱- سنای این ارباب را گویند و بخت کنند که هر یک درست است :

$$(۸ + ۱۲ - ۲۰) : (-۴) = \frac{-۸}{-۴} + \frac{+۱۲}{-۴} + \frac{-۲۰}{-۴}$$

$$(۹ - ۱۸ - ۳) : (+۳) = \frac{+۹}{+۳} + \frac{-۱۸}{+۳} + \frac{-۳}{+۳}$$

ارباب و یا معلوم میشود که :

در تقسیم مجموع جبری چند عدد بر یک عدد میتوان هر یک از جمله های آن مجموع را بر آن عدد تقسیم نمود و خارج قسمت های جز را جمع کرد بطور کلی میتوان نوشت :

$$(a + b + c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

زیرا ضرب این خارج قسمت در m مقسوم بدست میآید:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \times m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m + \frac{c}{m} \times m$$

$$= a + b + c$$

($\frac{a}{m} \times m$) مساوی a است زیرا $\frac{a}{m}$ خارج قسمت تقسیم a بر m است بنظر

$$(\dots, \frac{b}{m} \times m = b)$$

۶۲- تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است:

$$(-3 \times 2 \times -12) : (-4) = (-3 \times 2) \times \frac{-12}{-4} = -2 \times 2 \times 3$$

$$(-4 \times -20 \times -7) : (+5) = (-4 \times -7) \times \frac{-20}{+5} = -4 \times -7 \times -4$$

یعنی: برای تعیین خارج قسمت حاصل ضرب چند عدد جبری بر یکدیگر جبری a میتوان یکی از آن عددها بر a تقسیم نموده خارج قسمت حاصل ضرب سایر عددها ضرب نمود

$$\frac{bcd}{a} = \frac{b}{a} \times cd = \frac{c}{a} \times bd = \frac{d}{a} \times bc$$

یادآوری- $\frac{-8 \times 12 \times 20}{-4}$ را نمیتوان چنین نوشت:

$$\frac{-8}{-4} \times \frac{12}{-4} \times \frac{20}{-4}$$

زیرا موافق قاعده بالای باید یکی از اعداد را بر -4 تقسیم شود نه همه آنها

و- نامساویهای عددی

۳-۶- وقتی گویند عدد جبری α بزرگتر از عدد جبری β است (که $\alpha > \beta$) مثبت باشد و در غیر این حالت $\alpha < \beta$ میباشد.

مثلاً چون تفاضل $+7 = (-2) - (-9)$ مثبت است بنابراین $-2 > -9$

..... $-2 = (-3) - (-1)$ منفی است بنابراین $-3 < -1$

از این تعریف نتایج زیر بدست میآید:

۴-۶- نخست - هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است و هر عدد منفی از صفر کوچکتر

است

دوم - هر عدد مثبت بزرگتر از هر عدد منفی است

سوم - از دو عدد منفی آنکه قدر مطلقش بزرگتر است کوچکتر میباشد

زیرا هرگاه دو عدد α و β منفی باشند و بفرص اینکه $|\alpha| > |\beta|$ باشد لازم میآید

که $\beta - \alpha$ منفی باشد بنابراین $\alpha < \beta$ خواهد بود

نتیجه - رشته اعداد صحیح جبری بترتیب کوچکی و بزرگی چنین است

..... $4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots$

چهارم - میتوان برد و طرف یک نامساوی مقداری افزود یا

از دو طرف مقداری کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی

طریقی که بزرگتر شده بزرگتر میماند

بفرض $\alpha > \beta$ میتوان بدو طرف مقدار جبری γ را افزود در صورت خواهیم داشت

۱۱
 $b+c > a+c$ زیرا تفاضل $b-a$ مثبت میماند

پنجم- میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود و بدین
 اینکه جهت نامساوی تغییر نکند

۵<۷- از ضرب دو طرف در ۲ نتیجه میشود $10 < 14$ - زیرا تفاضل منفی است
 ششم- چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود جهت نامساوی
 تغییر میکند (یعنی اگر طرف اول بزرگتر است کوچتر از طرف دوم میشود و اگر کوچتر است بزرگتر
 میگردد)

۶<۲- از ضرب دو طرف در ۳- نتیجه میشود $18 < 6$ -

تمرین ها

۱- حاصل ضربهای ab و ac را در نخالت احساب کنید:

- $a=+5$; $b=-9$ و $a=-5$; $b=10$ و $a=-1$; $b=4$
- $a=-20$; $b=-12$ و $a=5$; $b=-15$ و $a=12$; $b=-10$
- $a=b=c=-7$ و $c=-8$

۲- $(x+y)(x-y)$ و $(x-y-1)(2x+2y)(2x-y)$
 را در هر یک از نخالت احساب کنید

- $x=2$; $y=-4$ و $x=2$; $y=7$ و $x=5$; $y=-2$
- $x=-7$; $y=-8$ و $x=-5$; $y=-5$ و $x=-12$; $y=4$

۳- $(a+b)(c+d) - ۳$ و $(a-b)(c-d)$ را در حالتها حساب کنید.

$a = ۱۲$	$b = ۸$	$c = -۲۰$	$d = ۱۱$
$a = -۱۲$	$b = -۱۱$	$c = -۵۰$	$d = ۳۰$
$a = ۱۱$	$b = ۱۱$	$c = ۱۱$	$d = -۱۱$
$a = ۱۵$	$b = -۵$	$c = -۱۳$	$d = -۳$
$a = -۳$	$b = -۸$	$c = -۱۵$	$d = ۲۵$

۴- مقادیری زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$$(-۲۱ + ۱۰ - ۱۵)(-۵) - (۷ - ۱۲)(-۳)$$

$$[(-۵ + ۱۱ - ۷) - (-۸ + ۱۱ - ۵)](-۶ + ۱۲)$$

$$[(-۲۰ + ۱۰ - ۵) - (-۱۰ + ۳ - ۹)][(۲۸ - ۱۵) - (۱۲ + ۷ - ۱)]$$

۵- تحقیق کنید که تساویهای زیر درین حالتها ی مخصوص درست است

بنتیجه $x = -۵$ $۳x - ۲ = ۲x - ۱۲$

" $x = ۱۲$ $۳x - ۵ = ۲x + ۷$

" $\begin{cases} x = ۵ \\ y = -۱ \end{cases}$ $۲x + ۳y = ۱۷ + ۱۰y$

" $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۲ \end{cases}$ $(x-y)(y-۲) = ۲x -$

٦- علمای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$$(-18 + 35 - 8) : (-2 + 7 - 15)$$

$$-117 : (5 - 3 + 9 + 2)$$

$$(-21)(49)(-56) : (-7)(-3)$$

$$(5-2)(7-3) : (4-7)$$

$$[-2 + (+2)(-5) + 17 - 12(-25)] : (10 - 12)$$

٧- حاصل $\frac{a}{c}$ و $\frac{a-b}{c}$ را در جابجایی زیر بدست آورید

$$a = -15 \quad b = 5 \quad c = 2$$

$$a = 24 \quad b = -8 \quad c = -6$$

$$a = -2 \quad b = 12 \quad c = 18$$

$$a = -41 \quad b = -15 \quad c = -30$$

٨- تخمین کنید که تساویهای زیر درین جابجاییها درست است

$$x = -9 \quad \text{وقتی} \quad \frac{x}{3} + 2x = 6 + 3x$$

$$\begin{cases} x = -18 \\ y = -21 \end{cases} \quad \frac{x}{18} - \frac{y}{7} = 2$$

٩- تخمین کنید که آیا تساویهای زیر درین جابجاییها درست است یا نه و نامساویها

نا درست را درست کنید

$$x = 2 \quad \text{اگر که} \quad 2x - 2 > (x-2)(x-7)$$

$$x = 5 \quad \cdot \quad 2x - 5 < \frac{x+2}{x-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -2 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad a - b > \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad \frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad (a-b)(a+b) < 2ab$$

۲- اگر $a < b$ باشد ثابت کنید که

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

۲- اگر a, b مثبت باشند ثابت کنید که

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

۱۲- ثابت کنید در چند ناساوی مجموع جبری طرفهای کوچکتر کوچکتر است از مجموع جبری طرفهای بزرگتر

(۱۳ سبک مثال عددی دستی این قضیه را نشان دهید)

۱۳- در دو ناساوی چون طرف کوچکتر ناساوی دوم را از طرف بزرگتر ناساوی اول طرف بزرگتر

ناساوی دوم را از طرف کوچکتر ناساوی اول کم کنیم این دو باقیانده تشکیل یک ناساوی بدهد که جبرش مثبت است

ناساوی اول خواهد بود - از روی چند مثال عددی امتحان کنید

۱۳- و چند ناساوی که دارای یک جهند و دو طرف آنها مثبت است حاصل ضرب طرفهای جهند
بزرگتر است از حاصل ضرب طرفهای کوچکتر از روی یک مثال عددی دستی این نکته را تحقیق کنید.

۱۵- نخستین بازیهای قهرمانی المپیک در سال ۷۷۶ پیش از میلاد مسیح شروع شد و تا سال ۳۹۶ پیش از میلاد

دوام داشت میدانیم که این بازیها هر چهار سال یکبار تشکیل میشود در ابتدا چند بازی شده است؟- دوباره
در سال ۱۸۹۶ پس از میلاد بازیهای قهرمانی المپیک شروع شد بفرض اینکه انقطاعی نداشت شده باشد معلوم
المپیک آخری (۱۹۳۷) که در برلن بوده چندین آنها است.

۱۶- α کیلوگرم گوشت که ریال ارزش دارد قیمت β کیلوگرم آغز احسان کنید (تایم مخصوص)

$$\alpha = 5; \beta = 16; \gamma = 7 \text{ همچنین } \alpha = 12; \beta = 40; \gamma = 3$$

۱۷- کارگری پس از α روز کار β ریال مزد گرفته است معلوم کنید پس از ۱۵ روز کار چند ریال

مزد باید بگیرد؟ (حالاتهای مخصوص $\alpha = 12; \beta = 120$ همچنین $\alpha = 18; \beta = 135$)

۱۸- پس از دفعی پروری α ریال پس از خسرو است اما پروری هفت β ریال و خسرو هفت

γ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند هفته دیگر هر دو دارای یک مبلغ پس انداز میشوند (در حالتی

$$\text{مخصوص } \alpha = 120; \alpha = 80; \alpha = 52)$$

۱۹- اگر نقطه واقع در درون مثلث را به رأس وصل کنیم سه مثلث تشکیل میشود که چون مساحت آنها

$$S_1, S_2, S_3 \text{ و } S_4 \text{ فرض کنیم این مستور حاصل میشود } S = S_1 + S_2 + S_3$$

(S مساحت مثلث مفروض است) برای S_1, S_2, S_3 و S_4 اندازه ای جبری مثبت منفی را بنویسید

بطوریکه این دستور برای وقتی که نقطه بیرون مثلث باشد نیز صدق کند.

۲۰- بین مسند را حل کنید وقتی که شکل چهار ضلعی باشد.

۲۱- فاصله ایرج و پرویز d قدم است ایرج هر دقیقه α قدم می‌دود و پرویز دقیقه دو قدم بیشتر می‌دود اگر هر دو یک مرتبه به وند بطوریکه پرویز برای گرفتن ایرج حرکت کند (یعنی هر دو یک ثانیه به وند) معلوم کنید پس از

۳ دقیقه و پس از ۵ دقیقه فاصله آنها چند می‌شود. (فرض میکنیم قدم‌های ایرج و پرویز یک درازا باشد)

۲۲- در مسئله پیش اگر $d = ۱۴$ قدم باشد پس از ۱۵ دقیقه فاصله آنها چند می‌شود. جواب عددی است

منفی معنای آن چیست؟

۲۳- در مسئله پیش وقتی که فاصله d قدم است معین کنید پس از چند دقیقه پرویز ایرج را بگیرد؟

(جابهای مخصوص: $d = ۱۸$; $d = ۴۸$; $d = ۶۰$)

ز- توان

۶۵- توان m ام عدد جبری α عبارت از حاصل ضرب m عدد مساوی α

و آنرا چنین نویسند α^m (می‌خوانند α به توان m)

$$\alpha^m = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}^m$$

α را پایه و m را که عدد صحیح و مثبتی است نما خوانند چنانکه توان پنجم ۲- چنین است

$$(-۲)^5 = -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ = -۳۲$$

و توان ششم ۵+ چنین می‌شود

$$(+۵)^3 = +۵ \times +۵ \times +۵ = +۱۲۵$$

و توان چهارم ۳- چنین است

$$(-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = +16$$

توان دوم و سیم یک عدد را بر تیب مربع و کعب آید و مانند چنانکه مربع ۲ عدد ۴ است

و کعب ۲ عدد ۸ است

پیشانی ساده

توان بی زیر را حساب کند

2^2	$(-2)^2$	$(-2)^4$	$(+5)^2$
$(-5)^2$	$(-5)^4$	$(-1)^2$	$(-1)^4$
$(-1)^6$	$(-1)^8$	$(+1)^2$	$(+1)^8$
$(-8)^2$	$(-6)^2$	2^2	m

۶۰۰- چون توان حالت مخصوصی از ضربت پس بنا بر قاعده نشانه ها (نموده ۴۰۰) چنین است

داشت:

اگر عددی مثبت باشد توان m آن هم آن عدد نیز مثبت است

و اگر یا منفی باشد توان m آن مثبت است هرگاه m جفت باشد

و منفی است اگر m نامق باشد

$$(+2)^4 = (-2)^4 = +16$$

چنانکه

$$(-2)^2 = -4$$

یادآوری- باید دانست که m و n باید گیر تفاوت نمی دارند زیرا اولی عبارت

از حاصل جمع m عدد منهای a و دومی عبارت از حاصل ضرب m سازه منهای a می باشد.

$$(-۴) \cdot ۳ = (-۴) + (-۴) + (-۴) = -۱۲$$

$$(-۴)^۲ = (-۴) \cdot (-۴) \cdot (-۴) = -۶۴$$

۶۷- برای بسج و تفریق و ضرب و تقسیم چند توان قاعده کلی اینست که هر یک از آنها را حساب کرده اند.

قاعده های پیش عمل میکنیم

$$(-۲)^۲ + (+۳)^۲ = (-۱) + (+۹) = +۸$$

$$(-۲)^۲ - (+۳)^۲ = (-۱) - (+۹) = -۱۰$$

$$(-۲)^۲ \times (+۳)^۲ = (-۱) \times (+۹) = -۹$$

$$(-۲)^۲ : (+۳)^۲ = (-۱) : (+۹) = -\frac{۱}{۹}$$

پیش عمل های ساده

حاصل عمل های زیر را بدست آورید

$$(-۵)^۲ + (-۳)^۲$$

$$(-۲)^۲ - (-۴)^۲$$

$$-۳^۲ - ۲^۳$$

$$(-۱)^۲ - (-۱)^۴$$

$$(-۴)^۲ \times (-۳)^۲$$

$$(-۴)^۲ (-۲)^۳$$

$$(-۱)^۳ \cdot (-۲)^۲ \cdot (-۳)$$

$$(-۵)^۳ (-۱)^۲ (-۳)$$

$$(-۲)^۴ : (-۳)^۲$$

$$(-۵)^۳ : (-۱)^۲$$

$$(-۳)^۴ : (-۲)^۲$$

$$(-۵)^۴ : (-۲)^۳$$

$$(-5)^1 \cdot (-5)$$

$$(-2)^2 \cdot (-2)^2$$

$$(-1)^2 : (-1)$$

$$(-4)^2 : (-4)^2$$

$$(-2)^1 \cdot (-2)^2$$

$$4^2 \times (-2)^2$$

۶۸- حالت‌های مخصوص - نخست - حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توان نیست دارای همان پایه که نمای آن مجموع نمای آنچند توان باشد

$$a^x \times a^y = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^{x+y} = a^5$$

$$(-2)^1 (-2)^2 = (-2)^3 = -2^3$$

چنانکه

$$(-5)^1 (-5)^4 = (-5)^5 = 15625$$

دوم - حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توان نیست پایه آن حاصل ضرب پایه ها و نمای آن یکی از نمایا باشد

$$(-2)^1 (-4)^2 = (-2)(-2) \times (-4)(-4)$$

چنانکه

$$= [(-2)(-4)] [(-2)(-4)]$$

$$= [(-2)(-4)]^2 = 12^2 = 144$$

$$x^a y^a z^a = (xyz)^a$$

و بطور کلی

سوم - خارج قسمت و توان که دارای یک پایه باشند توان نیست دارای همان پایه و نمایی مساوی تفاضل نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم

مثال ۱-

$$(-3)^3 : (-3)^2 = \frac{(-3)(-3)(-3)}{(-3)(-3)}$$

چون مقسوم و مقسوم علیه در دو بار برابر ۳- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{(-3)(-3)}{1}$ و یا

$(-3)^2$ که مساوی $(-3)^{3-2}$ است میشود

و بطور کلی در تقسیم a^m بر a^n اگر $n > m$ باشد خواهیم داشت

$$(۱) \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

مثال ۲-

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)^3}{(-4)^2} = -4$$

از روی دستور (۱) این خارج قسمت مساوی $(-4)^1$ میشود پس $(-4)^1 = -4$

$$a^1 = a$$

یا بطور کلی

یعنی: توان نخست هر عدد خود آن عدد است

مثال ۳-

$$(-2)^2 : (-2)^2 = 1$$

اگر دستور (۱) را درین مثال که نامساوی هستند بکار ببریم خارج قسمت مساوی $(-2)^0$

میشود از طرف دیگر اینجا خارج قسمت مساوی ۱ است بنابراین برای اینکه دستور (۱) را در حالت

$m = n$ نیز عینیت بهم قرار داد می‌کنیم که:

توان صفر هر عدد ۱ است یعنی $a^0 = +1$

مثال ۴-

$$(-5)^1 : (-5)^2 = \frac{(-5)^1}{(-5)^2}$$

که چون مقنوم و مقنوم علیه را دو بار بر ۵- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{1}{(-5)^1}$ است
 که عکس $(-5)^{-1}$ است میشود

چون موافق دستور (۱) عمل کنیم خارج قسمت با مساوی $(-5)^{-2}$ و یا $(-5)^{-2}$ میشود

در اینجا بنامی منفی میبرسیم - برای اینکه دستور (۱) کلی باشد میتوان چنین نوشت

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2}$$

پس قرار بر این میگذاریم
 توانی که دارای نمای منفی است مساوی عکس توانیست که پایه آن
 همان پایه و نمای آن قدر مطلق آن نما باشد

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

نتیجه - با قرار دادنای بالا همیشه میتوان نوشت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

اگر آن m و n دو عدد درست بوده و ممکن است $n > m$ و یا $m < n$

$m = n$ باشد

پیشش های ساده

عمل های برابر انجام میدهد

$2^2 \cdot 2$	$5^2 \cdot 5^2$	$(-2)^2(-2)^{-1}$
$(-2)^2 \cdot (-2)^1$	$3^2 \cdot 2^2$	$(-1)^{-1}(-2)^{-1}$
$5^0 \cdot (-2)^0$	$x^2 y^0$	$x^2 \cdot x^2$
$y^{-2} \cdot y^2$	$5^0 \cdot 2^0$	$2^2 : 2^2$
$2^{-1} : 2^{-2}$	$(-2)^1 : (-2)^2$	$(-2)^0 : (-5)^0$
$a^0 : a^0$	$x^1 : x^0$	$x^0 : x^2$
$a^1 : a^0$	$2^0 : 2^2 a$	$(-x)^2 : x^2$

۶۹- تبصره- میتوان $\frac{1}{b}$ را b^{-1} نوشت و بنابراین

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

و بدین ترتیب تقسیم دو عدد را بصورت ضرب می‌نویسیم

۷۰- هرگاه بخوانیم توان m ام a را بتوان m بار برسانیم کاهفت
 = را بتوان حاصل ضرب m بار برسانیم

یعنی $(a^m)^n = a^{mn}$

زیرا مثلاً $(x^2)^3 = xx \times xx \times xx = x^6$

تبصره- نابراین $(x^2)^3 = (x^3)^2$ و $(x^5)^6 = (x^6)^5$

$$(\frac{1}{a^2})^3 = (a^{-2})^3 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

۷۱- توان m ام خارج قسمت دو عدد جبری مساوی خارج قسمت

توان m ام آند و عدد است

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \text{یعنی}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{-m} \quad \text{زیرا}$$

$$= a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\left(\frac{-۴}{۲}\right)^۲ = \frac{(-۴)^۲}{۲^۲} = -۱ \quad \text{چانه}$$

پیش‌نمای ساده

۱- تقسیمای زیر را بصورت ضرب بنویسید

$$\begin{array}{cccc} \frac{۲}{۳} & \frac{-۷}{۵} & \frac{۲}{-۴} & \frac{-۵}{-۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{-۲}{-۵} & \frac{-۷}{-۲} & \frac{۱}{۳} \end{array}$$

۲- عملای زیر را انجام دهید

$$\begin{array}{cccc} (۵^۲)^۲ & (-۲^۱)^۲ & (-۱^۵)^۵ & (-۱^۵)^۶ \\ (x^۰)^m & [(-۵)^۵]^۰ & (۲^{-۲})^۲ & \\ [(-۲)(-۳)]^۲ & & [(-۲)^۲ \cdot (-۳)]^{-۱} & \\ \left(\frac{-۲}{-۳}\right)^۲ & (۵۵^۱)^۲ & \left(\frac{۳}{-۴}\right)^{-۲} & \\ \left(\frac{۵}{-۵}\right)^{-۱} & \left(\frac{-۵}{x}\right)^۰ & \left(\frac{-۵^۱}{-۲^۱}\right)^{-۱} & \end{array}$$

ج- ریشه اعداد جبری

۷۲- ریشه m ام عدد جبری a (n عددی است درست بزرگتر از صفر) عددی است

مانند $\sqrt[n]{a}$ بعضی که چون آنرا بتوان n رسانیم عدد a بدست آید و آنرا بدین شکل نویسند $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$a^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

بنا بر تعریف

نشانه $\sqrt[n]{a}$ را ریشگی و عدد n را شماره ریشه نامیم

ریشه دوم a یعنی \sqrt{a} را اغلب چنین نویسند \sqrt{a} (یعنی بدون شماره ریشه)

۷۳- چون توان جفت هر عدد جبری عددیست مثبت (نمره ۶۶) بنابراین:

ا) آذای بیج عددی نمیتوان یافت که بتواند ریشه جفت عدد منفی باشد

چنانکه عبارتهای $\sqrt{-۱}$ (ریشه دوم -۱) و $\sqrt{-۵}$ (ریشه چهارم -۵)

بدون معنی باشند

ب) آیا هر عدد مثبت دارای دو ریشه n ام است وقتی که n جفت باشد

و این دو ریشه قرینه یکدیگرند

چنانکه عدد ۸۱ دارای دو ریشه دوم است $۹ + ۹$ و -۹ : $(\pm 9)^2 = 81$

گوئیم ریشه دوم ۸۱ مساویست با علاوه یا منهای ۹

و همچنین عدد ۸۱ دارای دو ریشه چهارم $۳ + ۳$ و -۳ میباشد : $(\pm 3)^4 = 81$

ث) هر عدد جبری (خواه مثبت یا منفی) دارای یک ریشه از شماره

فرد است

چنانکه ۸- یک ریشه سوم دارد مساوی -۲ : $\sqrt[3]{-8} = -2$

و همچنین ریشه پنجم ۳۲ عدد ۲ است : $\sqrt[5]{32} = 2$

یکتیه حالتها $\sqrt{2} = 0$ (جفت تاق)

۷۴- از اینجا و از آنچه در توان عددی جبری گفتیم نتیجه میشود:

۱- شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری مساوی باشند اینست که توان تاق یا ریشه تاق آن دو

مساوی باشند

۲- شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری هم نشانه (برداشت یا برداشتی) مساوی باشند

این است که توان جفت با (اگر مثبت باشند) ریشه های جفت آن دو عدد مساوی باشند

این نتیجه را میتوان مثلاً برای نشان دادن تساوی دو عدد که ظاهراً مختلف باشند بکار برد

مثلاً میخواهیم ثابت کنیم که دو عدد 748 و 473 مساویند چون برداشت یا برداشتی کافی است

ثابت کنیم توانهای دوم آنها یکی است توان دوم اولی 48 و توان دوم دومی چنین است

$$(473)^2 = 4^2 \times (72)^2 = 16 \times 2 = 48$$

۷۵- ضرب ریشه ها - حاصل ضرب ریشه های چند عدد که دارای

یک شماره باشند مساویست با ریشه حاصل ضرب همان چند عدد به همان

شماره

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

یعنی مثلاً

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم میشود

$$a \cdot b \cdot c = abc$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

پس

$$\sqrt{-۲} \cdot \sqrt{۹} = \sqrt{-۱۸} = -۳$$

۷۶- خارج قسمت دو ریشه خارج قسمت ریشه m ام دو عدد مساویست با ریشه m ام خارج قسمت آن دو عدد

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad \text{یعنی مثلاً}$$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم درستی این تساوی معلوم میشود

$$\sqrt{۸} : \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۸}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲ \quad \text{پس}$$

$$\sqrt[۵]{-۹} : \sqrt[۵]{۸۱} = \sqrt[۵]{\frac{-۹}{۸۱}} = \sqrt[۵]{-\frac{۱}{۹}}$$

پیشانی ساده

حاصل ضرب و خارج قسمتهای زیر را بدست آورید:

$$\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۲} \quad \sqrt{-۲} \cdot \sqrt{-۲} \quad \sqrt[۳]{۲} \cdot \sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۴]{۲} \cdot \sqrt[۴]{-۱۶} \quad \sqrt[۵]{۱۶} \cdot \sqrt[۵]{-۲} \quad \sqrt[۶]{-۵} \cdot \sqrt[۶]{-۵}$$

$$\sqrt{۲} : \sqrt{۵} \quad \sqrt[۳]{۲} : \sqrt[۳]{-۸۱} \quad \sqrt[۴]{۸} : \sqrt[۴]{۲}$$

$$\sqrt{-۲} : \sqrt{-۴} \quad \sqrt[۵]{۶۴} : \sqrt[۵]{-۲} \quad \sqrt[۶]{x^{۱۸}} : \sqrt[۶]{x^۲}$$

۷۷- عکس قاعده بای لا نیز درست است یعنی:

اولاً ریشه m ام حاصل ضرب چند عدد مساوی حاصل ضرب ریشه m ام هر یک از آنهاست

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \quad \text{یعنی}$$

$$\sqrt[3]{\frac{r}{12}} = \sqrt[3]{\frac{r}{4 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{r}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{\frac{r}{4}}$$

بنابرین

$$\sqrt[3]{\frac{r}{27}} = \sqrt[3]{\frac{r}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{r}{3^3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{r}{1}}$$

نایافته $\sqrt[3]{\frac{r}{27}}$ ام خارج قسمت دو عدد مساوی خارج قسمت ریشه
 $\sqrt[3]{\frac{r}{27}}$ ام آنها است

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

یعنی

$$\sqrt[3]{\frac{r}{27}} = \frac{\sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{27}}$$

بنابرین

$$\sqrt[3]{\frac{r}{27}} = \frac{\sqrt[3]{r}}{3}$$

پیش‌ش‌های ساده

ریشه‌های زیر را ساده کنید:

$$\sqrt{8}$$

$$\sqrt{12}$$

$$\sqrt{125}$$

$$\sqrt{45}$$

$$\sqrt[3]{81}$$

$$\sqrt[3]{-16}$$

$$\sqrt[3]{54}$$

$$\sqrt[3]{-64}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{12}{17}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{17}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{16}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{16}{27}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{54}{125}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{24}{125}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{6}{64}}$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حساب کنید

$$\left(4 - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{3} - 2\right)$$

$$(-2) \left(+\frac{2}{3}\right) : (-2) \left(2 - \frac{5}{3}\right)$$

$$\left(7 + \frac{9}{5} + \frac{-1}{15} \right) (-2) + \frac{-9}{11} + \left(9 - \frac{-6}{5} \right) : \frac{15}{13}$$

$$4 \left(2 - \frac{5}{4} + \frac{11}{18} \right) \left(\frac{-49}{4} \right) - \left(10 - 4 - \frac{6}{5} + 2 \right) : \frac{45}{1}$$

۲- مطلوبت محاسبه عبارت

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right)$$

در حالت ای زیر

$$a=1; b=2; a=2; b=3; a=-6; b=5; a=-10; b=-15$$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$$3^2 - (-2)^2; 2^2 + (-2)^2; (-1)^2 + (-1)^2 - (-2)^2$$

$$(-2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) : (-4)^2$$

$$\left[(-5)(+2)(-2) : (-2) \right]^2$$

$$(-5)^2 + 2(-5)^2(+2) + 2(-5)(-4)^2 - 2^2$$

۴- عبارتهای زیر را حساب کنید و نتایج $x=-2$ و $y=2$ باشد

$$x^2; x^2; y^2; 5xy$$

$$x^2 \pm y^2; x^2 \pm y^2; x^2 - y^2; x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$x^2 - 2xy + 2xy^2 - y^2; (x+y)^2(x-y)^2; (x^2-y^2)^2$$

۵- عبارت $\frac{(2a+b)(a-2b)^2}{2ab}$ را در حالت ای زیر حساب کنید:

$$a=1; b=-1; a=-2; b=6; a=-4; b=-2$$

۶- در تساویهای $x^2 + 12 = 7x$ و $2x^2 - 20x + 50 = 0$

$$x^2 + x = 12$$

جای x اعداد ± 5 و ± 3 و ± 4 و -1 و $\frac{1}{4}$

گذشته نشان دهید درازا کدام اعدادتوی برقرار خواهد بود

۷- مطلوبست محاسبه عبارتتهای زیر:

$$\sqrt{(-4) \times 5 \times (-3) + 21} \quad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} : (-3)$$

$$\sqrt[3]{6(-4) + (-6)9 - 10}$$

$$(-3)\sqrt[3]{(-4)(-3) - 2} \cdot \sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{-27}$$

۸- عبارتتهای زیر را با $a=16$; $b=27$; $c=24$ محاسبه کنید

$$\sqrt{\frac{2b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{9c}} + \sqrt{\frac{b}{27a}}$$

$$\sqrt[3]{4a} - \sqrt{\frac{25}{12b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{12b}}$$

$$\sqrt{\frac{2a}{12c}} - \sqrt{\frac{9b}{12c}} + \sqrt{\frac{a}{12c}}$$

$$\frac{2}{3}a - \sqrt{\frac{4a}{12b}} - \sqrt{\frac{4ab}{9c}}$$

۹- عبارتتهای زیر را محاسبه کنید وقتی که $a=-4$; $b=-2$

و $c=2$; $x=-1$; $y=-2$; $z=1$ باشد

$$\sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+12cx^2}$$

$$\sqrt{2x^2 - 2bc - c^2} : \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z)(x - y - 2z)} : \sqrt{-2x - 2y + z}$$

۱- میدانم رای که جسمی در موقع افتادن می پاید از دستور $e = \frac{1}{4} g t^2$ بدست میآید که در آن

e درازای راه و g تقریباً مساوی ۹٫۸۱ متر در ثانیه باشد که جسم در حرکت است - حال اگر بدانی

برجی سی و پنج متر باشد معلوم کنی چند ثانیه طول میکشد تا سنگی که از بالای آن رانده شده پایی برج برسد؟

۱۱- زمینی است شکل مستطیل که درازای آن ۲۵٫۳۲ متر و پهنایش ۱۳٫۷۵ متر است بخوابیم آنرا

با زمینی شکل مربع که مساحت مساوی مساحت آن مستطیل باشد عوض کنیم ضلع این مربع را حساب کنید.

۱۲- زمینی است شکل مثلث متساوی الاضلاع که درازای هر ضلعش ۲۵٫۷۵ متر است ارتفاع آن

مثلث را تا $\frac{1}{3}$ متر تقرب حساب کنید.

۱۳- پین ۵ و ۷ متر تب سطح و حجم یک کره این رابطه برقرار است $25\pi r^2 - 25\pi r^3$ اگر سطح این

کره مساوی ۷۲ متر مربع باشد حجم آن چقدر است؟

۱۴- محیط مثلث متساوی الساقین ۱۶ متر است یکی از ساقهای آن ۱۰ متر باشد ارتفاع و مساحت

آنرا حساب کنید.

فصل سوم - عبارتهای جبری بهم چندین

الف - عبارتهای جبری

۷۷ - عبارت جبری تشکیل شده است از یک رشته حروف و اعداد که بواسطه نشانه‌های

جبری بهم پیوسته باشند

$$\text{مانند } \frac{a+b}{c}, \quad x - 2(a+b), \quad \frac{a}{b}, \quad \sqrt{a-b^2} - \frac{c}{d}$$

۷۸ - یک جمله - هر عبارتی که بین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق نباشد یک جمله

یا جمله نامند

$$\text{مانند } -5, \quad \frac{a}{4}, \quad x, \quad x^2, \quad -2xy, \quad \frac{a\sqrt{x}}{x\sqrt{y}}$$

۷۹ - ضرب - چون عملی بین اعداد یک جمله مفروضی را اجرا نمائیم حاصل آن

ضرب عددی یک جمله مفروض گویند

$$\text{مثلاً در یک جمله } \frac{a}{4} \cdot 5 \cdot x^2 - \frac{c}{d} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 - \frac{c}{d}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{8} - \text{ضرب عددی یک جمله مفروض است}$$

و همچنین در یک جمله نامی بالا ضربهای عددی بتدریج عبارتند از ۵ - و $\frac{1}{4}$

$$1, -1, -2, \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$

و بطور کلی ضرب یک جمله بر حسب یکی از حرفهای آن عبارت از حاصل عملی است که بین سایر

حرفها و عدد های یک جمله انجام میشود

پرسش های ساده

ضرب های عددی و همچنین ضرب های یک جمله ای زیر را بر حسب حرف x بیان کنید.

$$\begin{array}{cccc} -3x & \frac{1}{4}ab & \sqrt{\frac{3}{5}}xy^2 & -xy \\ xy^2 & \frac{-3}{\sqrt{2}}a & \frac{-2abc}{2\sqrt{y}} & -\frac{5\sqrt{2}yx}{2a} \end{array}$$

۸۰- جمله های مشابه - جمله های مشابه را گویند که تنها در ضرب اختلاف

داشته باشند

مانند $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{7}$ و همچنین $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{7}$ و همچنین

$$-5ax, 6ax, -\frac{\sqrt{2}}{3}ax$$

۸۱- جمع جمله های مشابه - روشن است که:

$$2a + 5a = 7a$$

$$xy + 2xy + 1xy = 4xy$$

$$3b^2 + (-4b^2) = -b^2$$

$$3abc + (-abc) + 4abc = 6abc$$

بنابراین میتوانیم درستی این تساویها را اینطور تحقیق کنیم که بجای حرفها عدد های هر یک

بگذاریم. پس می بینیم که اندازه عددی دو طرف تساویها یکی است

بنابراین برای جمع جمله های مشابه این قاعده را داریم:

۱۲- قاعده- حاصل جمع چند جمله تشابه جمله ایست تشابه با آنها که ضریبش حاصل جمع ضریبها باشد

$$6a^4 + 4a^4 = (6 + 4)a^4 = 10a^4 \quad \text{مانند}$$

$$3ax + 2ax + 1ax = (3 + 2 + 1)ax$$

$$= 6ax$$

$$xy + (-xy) = (1 - 1)xy = 0$$

توجه- در بعضی جا که اشتباهی رخ ندهد میتوان عبارتتائی مانند $(x+y)$

و $\sqrt{7-3x}$ را یک جمله در نظر گرفت

بنابراین:

$$6(x+y) + [-5(x+y)] + (x+y) = 2(x+y)$$

$$\sqrt{7-3x} + (-2\sqrt{7-3x}) + 3\sqrt{7-3x} = 2\sqrt{7-3x}$$

پیشگی ساده

حاصل عبارتتای زیر را پیدا کنید:

$$5a + 3a$$

$$-11a + 7a$$

$$-3x^2 - 2x^2$$

$$-xy + 3xy - 2xy$$

$$-\frac{2}{x} + \frac{5}{x}$$

$$2\sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} + \sqrt{xy}$$

$$2(5-x) + 3(5-x)$$

$$2(a + \sqrt{b}) - 2(a + \sqrt{b}) + 2(a + \sqrt{b})$$

۸۳- جمع جمله های غیر متشابه - برای جمع جمله های غیر متشابه آنها را با نشانه ای

خود بدنبال هم بنویسند

مثلاً حاصل جمع دو جمله $-2a$ و $3b$ را چنین نویسند $-2a + 3b$

۸۴- تفریق یک جمله با - چون یکجمله در حکم یک جمله عدیست (بازارخانه)

عددی حرفی (برای تفریق موافق امنه ۲۸) باید نشانه یکجمله کاسته را تغییر

داده با یک جمله کاهش یاب جمع جبری نمائیم

مثلاً برای تفریق $3xy$ از $7xy$ راه عمل چنین است:

$$7xy - (-2xy) = 7xy + (+2xy) = 10xy$$

$$-5\sqrt{x^2+y^2} - (-2\sqrt{x^2+y^2}) =$$

همچنین

$$-5\sqrt{x^2+y^2} + (+2\sqrt{x^2+y^2}) = -3\sqrt{x^2+y^2}$$

پرسش های ساده

تفریق های زیر را عمل کنید:

$$2a^2 \text{ از } a^2$$

$$5x^2 \text{ از } x^2$$

$$-\frac{3}{4}xy \text{ و } \frac{1}{4}xy$$

$$-5xy \text{ و } -2xy$$

$$-\sqrt{xy^2} \text{ و } -\sqrt{xy^2}$$

$$-3\sqrt{5x} \text{ و } 3\sqrt{5x}$$

$$\frac{-3x^2}{\sqrt{5}} \text{ و } \frac{2x^2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{5}a\sqrt{x} \text{ و } -\frac{1}{5}a\sqrt{x}$$

۱۵- چند جمله - از جمع جبری یک جمله چند جمله تشکیل میشود

$$\text{مانند } ax + b + c ; ax^2 + bx + c ; 1 - 2y + 3x^2$$

۱۶- ساده کردن چند جمله - چون چند جمله مجموع چند یک جمله است یعنی حقیقت

مجموع چند عدد جبری است پس میتوان جای آن یک جمله را بداد و تغییر داد (نمره ۲۴) بخصوصاً یک جمله‌ای مشابه را بپس نوشت و بجای جمله‌ای مشابه مجموعه‌شان را فراداد این عمل را ساده کردن چند جمله میگویند

مثال - چند جمله

$$1 - 2c + 3cb - 4c^2 + 1 + 2cb - 2c + 3c^2 - 4c^2$$

رایتوان (با قرار دادن جمله‌های مشابه در داخل پرانتز) چنین نوشت

$$(1 - 2c + 3c^2) - 2c + (1 + 2cb - 4c^2) + (-4c^2 + 3cb)$$

پس از ساده کردن چنین میشود

$$1 - 2c - 4c^2 + 3cb$$

ساده کردن چند جمله با بر حسب یکی از حرفهای آنها:

مثال ۱- چند جمله $ax + bx + 1$ بر حسب حرف x دارای دو جمله مشابه

ax و bx میباشد که مجموعه‌شان $x(a+b)$ است

بنابراین چند جمله بالا پس از ساده کردن چنین میشود

$$(a+b)x + 1$$

مثال ۲- در چند جمله

$$2x^4 + 3x^3 - ax^2 - 2ax^2 + x^2 - 2bx + x$$

جمله های مشابه بر حسب حرف x عبارتند از $(2x^4, 3x^3)$ و $(-2ax^2, x^2)$

و $(2bx, x)$ بنا بر این عبارت جبری بالا پس از ساده شدن بدین صورت در می آید

$$(2-a)x^4 + (3-2a)x^3 + x^2 + (-2b+1)x$$

پرسش های ساده

چند جمله ای زیر را بر حسب حرف x ساده کنید:

$$3x - x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x^2 + ax^2 - x^2$$

$$x^2y - xy^2 + x^2 - x$$

$$1 - ax + 2x - 1$$

$$x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + 1$$

$$x^2\sqrt{2} - x^2 + 1 - x$$

$$2x^2 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - a + bx$$

۱۷- مرتب کردن چند جمله بحسب توانهای صعودی یا نزولی

در نوشتن عبارت چند جمله اغلب بحرف آنرا در نظر گرفته چند جمله را نسبت به توانهای آن حرف

در مرتب می کنند یعنی طوری می نویسند که درجه آن حرف در جمله ای آن چند جمله یا مرتباً نزول کند و یا

افزونی نماید در حالت اول گوئیم چند جمله بحسب توانهای آن حرف مرتب شده و در حالت

دوم گفته میشود که بحسب توانهای آن حرف مرتب شده است

مثال ۱- چند جمله

$$x^5y^2 - 5x^4y^2 + ax - 2b + y^5x^1$$

و اگر بجه توانای نزدی x مرتب کنیم چنین نوشته میشود

$$-5x^4y^2 + x^5y^2 + y^5x^1 + ax - 2b$$

و اگر بجه توانای صعودی x مرتب شود چنین نوشته میشود

$$-2b + ax + y^5x^1 + x^5y^2 - 5x^4y^2$$

نمای x در جمله $-2b$ صفر است زیرا میتوان نوشت

$$-2b = -2bx^0$$

مثال ۲- چند جمله بالا را اگر بترقیب توانای نزدی و صعودی y مرتب کنیم بترقیب

$$x^5y^2 - 5x^4y^2 + x^5y^2 + ax - 2b$$

خواهیم داشت

$$ax - 2b + x^5y^2 - 5x^4y^2 + x^5y^2$$

نمای y در $-2b$ و ax صفر است یا عبارت دیگر ضریب y در چند جمله صفر

است $ax - 2b$

۸۸- درجه چند جمله نسبت بیک حرف آن و چند جمله کامل و ناقص-

این درجه عبارتست از بزرگترین درجه ای که آن حرف در جمله های آن چند جمله دارد

چنانچه چند جمله بالا نسبت به x از درجه چهارم است نسبت به y از درجه پنجم

و چون این چند جمله نسبت به x شامل تمام درجه های کمتر از ۴ است گوئیم که چند جمله

چهارم کامل است نسبت به x

ولی چون تمام درجه های پایین تر از ۵ را از x ندارد (مثلاً جمله x^4 در آن نیست و x^5 باشد نهاده) گوئیم چند جمله بالا درجه پنجم ناقص است نسبت به x

مثال - چند جمله کامل درجه اول نسبت به x شامل دو جمله است یک جمله دارای x از درجه اول و یک جمله بدون x (یا دارای x از درجه صفر) پس بصورت کلی $ax + c$ خواهد بود
 همچنین چند جمله کامل درجه دوم نسبت به x دارای سه جمله است بصورت کلی

$$Ax^2 + Bx + c \text{ است}$$

و بطور کلی چند جمله کامل از درجه n ام دارای $n + 1$ جمله است.

پریش های ساده

چند جمله ای زیر را مرتب نموده و درجه آنها را بر حسب هر یک از حرف های آنها معلوم نموده و تعیین کنید

که ام یک کامل که ام یک ناقصند

$$x^2 - 3x^2 + y - 1$$

$$x^2 - y$$

$$ax^2 - 3bx$$

$$ax^2 - 1$$

$$1 - 2x^2 - 3ax$$

$$x^2 + 1 - xy + 2y^2$$

$$xy^2 - y^2x + 1$$

$$x^2y - y + 1$$

$$y^2 - y + 2xy^2 - 1$$

$$\sqrt{2}x - x\sqrt{5} - y^2\sqrt{3}$$

۱۸۹ - جمع چند جمله های با یکدیگر - برای جبه چند جمله های با یکدیگر جمله های آنها را

یافته شده های خودشان بدنبال هم می نویسیم و چند جمله حاصل را مطابق قاعده بالا ساده می کنیم

برای این کار بجای آنکه چند جمله را دنبال هم بنویسیم بهتر این است که ابتدا هر یک را ساده کرده بعد بقیه بنویسیم که جمله های مشابه آنها دسته دسته در یک ستون قرار گیرند

مثال - برای جمع $2a - 2b - ac^2$ و $2b + 3ac^2$ صورت عمل چنین است:

$$2a - 2b - ac^2$$

$$2b + 3ac^2$$

$$- 2a \quad - 3ac^2 + 11$$

حاصل جمع $- a - b - 5ac^2 + 11$

چون هر یک از این چند جمله را در حقیقت یک چند جمله عدیست پس باید مجموع جبری مقدار عددی آنها را با نام مقدارهای عددی a و b و c مساوی مقدار عددی حاصل جمع باشد (بازارها) مقدارهای a و b و c

چنانکه برای تخمین اگر $a = -2$ و $b = 5$ و $c = -1$ باشد خواهیم داشت

$$2a - 2b - ac^2 = -4 - 10 + 2 = -12$$

$$2b + 3ac^2 = 10 - 6 = 4$$

$$- 2a \quad - 3ac^2 + 11 = +4 \quad + 14 + 11 = 29$$

$$- a - b - 5ac^2 + 11 = +2 - 5 + 10 + 11 = 18$$

مثال دیگر - حاصل جمع چند جمله‌های
 $ax^2 + 4x + 3x^2$ و $cx^2 - 2ax^2 + bx - 1$ و $bx - x + a$ را بحسب حرف x بدست آورید

می‌توان آن‌ها را با نشانه‌هایشان دنبال هم نوشتند چند جمله حاصل را بر حسب x ساده نمود و نیز ممکن است ابتدا بر یک از چند جمله‌های بالا را ساده کنیم ازین قرار:

$$(c-2a)x^2 + bx - 1 \quad \text{و} \quad (a+4)x^2$$

$$\text{و} \quad (4b-1)x + a$$

و برای اینکه چیزی از دست نماند بهتر است که بر یک از چند جمله‌ها را مثلاً بر طبق توانهای صعودی x مرتب کرده بعد موافق قاعده بالا عمل نمایم درین صورت خواهیم داشت:

$$(a+4)x^2 + 3x^2$$

$$-1 + bx + (c-2a)x^2$$

$$a + (4b-1)x$$

$$-1 + a + (a+4b+3)x + (c-2a+3)x^2$$

۹. تفریق چند جمله - چون هر چند جمله در حقیقت چند جمله عددی است برای تفریق

موافق (نمره ۳۶) باید نشانه‌های کاسته را تغییر داده با جمله‌های کاشتن یا جمع جبری نمود.

مثال ۱- می‌خواهیم $5ac$ را از $3ac - 1 + bx$ تفریق کنیم طرز عمل بدین قرار

خواهد بود

$$\begin{aligned} 6x + 2ac - 1 - (5ac) &= 6x + 2ac - 1 + (-5ac) \\ &= 6x - 3ac - 1 \end{aligned}$$

مثال ۲- می‌خواهیم $11 - 2xy + 4x^2$ را از $2 - 2xy + 5y^2 + 2x^2$ بکشم
کنیم جمله‌های کاسته را تغییر نشانه داده با کاهش یا بجمع می‌کنیم از بنقرار:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 2xy + 5y^2 - 2 \\ - 4x^2 + 2xy \quad + 11 \\ \hline - 2x^2 + 5y^2 + 9 \end{array}$$

همان طور که در جمع گفتیم شد می‌توان بجای حرفه عدد و قرار داده دستی عمل را تحقیق نمود

چنانکه اگر $x = 2$ و $y = -5$ باشد کاهش یا ب 150 و کاسته 125 و بنا بر این تفاضل 125 خواهد بود و اندازه عددی $4 + 5y^2 - x^2$ نیز 125 است

تمرین ۱

۱- جابجایی زیر را بحسب مرتبه ساده نموده و مرتب کنید.

$$ax + 2x - a$$

$$ax^2 - 2mx + x - 1$$

$$x^3 - 2ax^2 - bx + 2 - x^2 + x$$

$$x^3 - ax + bx^3 - bx + 2x^2 - 5$$

$$2ax^2 - 2bx + 5xy - 7ax$$

$$x^T - mx^T + (mx - x + m - 1)$$

$$Kx^T - (x - K)(K - x) + m(K^T - x^T)$$

۲- عبارتهای زیر را ساده نموده، ضرایب آنرا $x = -1$ ، $y = -2$ و $z = 1$ در عبارتهای

تعیین کنید.

$$(x^T + xy - y^T) - (x^T - yx - y^T) + (xy + x^T - x^T)$$

$$(x^T + y^T - 2xy) + (2x^T - 4y^T - yx) - (2x^T - 4x^T + 2xy)$$

$$(x^T + y^T - x^T) - (x^T - y^T - x^T) - (x^T - y^T - x^T)$$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(2a - 2bc + c) - (5a - b + c)$$

$$(2x - 2y + 5) - (2x + 2y - 7)$$

$$(2\sqrt{r} - 5\sqrt{r} + 2) - (2\sqrt{r} + 5\sqrt{r} + 11)$$

$$-2x^T - (5y - 2x^T + 11) - (3x^T - 2y + 2) + 5x^T$$

$$-(12a + 4b^T) - (a^T - 12b^T + 12c^T) + 5a^T - (5c^T - 9b^T)$$

$$2ac - (ab + d) - [2ab - 2d - (-d - 4ac + 2ab)] - 2ac$$

$$m^T - (x - y - m^T) - 2x - [2m^T - (1x - x - y)]$$

$$B = -5y + 2x + 2z, \quad A = -5x + 2y + 2z \quad \text{بجز ۲}$$

$$C = -2z + 2x + 2z$$

مطابقت ضرایب عبارت‌های $A+B+C$ ، $A-B+C$ ، $-A+B+C$ ،

$$A+B-C ،$$

۵- بر حسب

$$A = x^5 + x^3 - 8x^2 - 1$$

$$B = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

$$C = x^5 - 2x^3 + x - 2$$

$$D = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

مطلوبت ضرایب $\pm A \pm B \pm C \pm D$ با ترکیب نشانه‌های مختلف در هر یک از این‌ها بازارا

۲- $x = -2$ درستی عمل را امتحان کنید

۶- معلوم کنید در x سال قبل مسکن شخصی چند بوده است در صورتیکه به این α سال بعدش ۵۲ سال

باشد

۷- ابرج α ریال و یکو مرث β ریال و جمشید γ ریال پول داشتند و از آنکه داشتند که اولی ابرج

از پول خود به نفس رفتن خود آنقدر به پدر پول آنرا داد و برابر شود و بعد یکو مرث از آنچه که دارد پولهای و رفتن خود را

دو برابر کند و پس از آن جمشید نیز کار را بنمایه معلوم کنید پس از این کار مبلغ پول هر یک چند باشد

۸- چهار نفر مبلغ A ریال را بین شش قسم خود تقسیم نمودند و اولی α ریال و نیمه باقیانده و را بر سه برابر

دومی β ریال و $\frac{1}{4}$ باقیانده و را دسومی γ ریال و $\frac{1}{8}$ باقیانده و را و آنچه که میماند از آن چهار نفر خواهد بود

سهم هر یک که ام چند است؟

ب. همجنس‌ی

۹۱- تعریف: همجنس‌ی (مساوی) عبارت از تساوی بین عبارت جبری باشد:

$$۲ - ۲ = ۴ - ۵$$

$$x - ۲y = ۲x + y - x - ۲y$$

$$x - ۲ = ۲x$$

$$x - x = ۲$$

$$۱x - y = ۰$$

عبارت طرف چپ نشانه‌ی را طرف اول همجنس‌ی عبارت طرف راست از طرف دوم همجنس‌ی می‌نامیم.

مثلاً در همجنس‌ی دوم طرف اول $x - ۲y$ است و در همجنس‌ی آخری طرف دوم صفر است.

در همجنس‌ی‌های بالا همجنس‌ی اول یک تساوی عددی است.

در همجنس‌ی دوم اگر طرف دوم را ساده کنیم حاصل $x - ۲y$ یعنی عین طرف اول شود.

بنابراین هر مقدار بجای x و y قرار دهیم تساوی درست است.

بر همجنس‌ی (۱) مانند همجنس‌ی دوم، اگر که دو طرف آن پس از ساده کردن عین یکدیگر شوند آنجا که

بنابراین در اینجا و هر مقدار بجای حروف داخل دو طرف قرار دهیم تساوی

درست است.

معمولاً در اتحادها بجای نشانه‌ی «=» را گذارند

در پنجمی سوم دو طرف دو عبارت مختلف میباشند مساوی نیستند مگر آنکه بجای x یک یا چند مقدار
معینی (درین مثال عدد ۳-) گذاشته شود همچنین است دو پنجمی چهارم و پنجم - درین پنجمیها
دید میشود که تساوی دو طرف همیشه برقرار نبوده و فقط وقتی برقرار است که بجای بعضی از حرفها مقدار
معینی گذارده شود

مثلاً در پنجمی $x - 3 = 7$ دو طرف آن وقتی مساویند که بجای x عدد ۱۰ را قرار دهیم
و همچنین در پنجمی $x - 2 = x^2$ تساوی وقتی درست است که بجای x یا ۲ یا ۱
گذارده شود

مقدار یا مقدارائی را که بجای بعضی از حرفها باید گذارد تا دو طرف
پنجمی با هم مساوی شوند پاسخ یا پاسخهای یاریشه ای پنجمی
گویند

عدد ۱۰ در پنجمی $x - 3 = 7$ و عدد ۱ و ۲ - در پنجمی $x^2 - x = 2$ پاسخ
یاریشه ای این پنجمی هستند

حرفی را که باید پاسخ پنجمی را بجای آن گذارد تا دو طرف با هم مساوی شوند مجهول
پنجمی یا سایر مقدارائی دو طرف را معلوم ای پنجمی نامیم

مثلاً در پنجمی $x - 2 = 2$ حرف x مجهولات

و همچنین در پنجمی $x - 2a = a$ اگر a معلوم باشد x مجهول پنجمی است

و پاسخ یاریشه این پنجمی $3a$ میباشد

پیش‌های ساده

۱- ثابت کنید که هم‌بندی‌های زیر اتحاد هستند

$$x - a = -(a - x)$$

$$a + 6 = 7 + a - 1$$

$$2x - 1 + x + 1 - 2x = 0$$

$$a + b - x = 2a - 2x + 2b - (a - x + 2b)$$

$$a^2 - (x + 2y - 1) = 2a^2 - 2x - (a^2 - x + 2y) + 1$$

۲- ببینید آیا هر کدام از عدد‌های داخل پرانتز ریشه هم‌بندی دیف خود هستند یا نه؟

$$x - 3 = 2 \quad (5)$$

$$2y + 5 = 11 \quad (3)$$

$$4 - y = 2 \quad (2)$$

$$6y - 10 = 2 \quad (1)$$

$$2 + z = 6 \quad (2)$$

$$4 - 5a = -10 \quad (-6)$$

$$4 - x^2 = 7 \quad (-1)$$

$$2m^2 - 2 = 0 \quad (\pm 1)$$

$$4 - a^2 = 5 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x = 8 \quad (-2)$$

۹۲- هم‌بندی‌های هم‌ارز - دو هم‌بندی را هم‌ارز گویند هرگاه ریشه‌های آن‌ها

اتفاقی باشد

مانند $2x + 3 = 15$ و $x - 1 = 5$ که ریشه هر دو ۶ است

و دو هم‌بندی $x^2 = 3x - 2$ و $2x^2 + 4 = 6x$ که ریشه‌های آن‌ها ۲ و ۱ است

۹۳- حل بجهندی - حل کردن بجهندی یعنی یافتن ریشه های آن .
 برای حل کردن بجهندی باید آن را بیک عدد بجهندی همی هم از آنکه بتدریج هر یک
 از دیگرى ساده تر باشند تبدیل نمود بطوریکه آخرین بجهندی جواب را روشن سازد .
 برای این مقصود اصل های زیر را که بناسبت ساده بودن احتیاجی بدلیل دارد
 باید در نظر داشت :

۹۴- اصل ۱- هرگاه با دو طرف بجهندی یک مقدار جمع کنیم یا از دو طرف آن
 یک مقدار کم کنیم ریشه بجهندی تغییر نکند یعنی بجهندی حاصل هم از راست بجهندی میشود
 مثال - ریشه بجهندی $x + 2 = 5$ را پیدا کنید
 بنا بر اصل بالا از دو طرف ۲ یک کم میکنیم نتیجه میشود

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 2 \quad \text{یعنی} \quad x = 5 - 2$$

۹۵- نتیجه - اولاً دو عبارت مساوی و بهم نشانه را میتوان از دو طرف

بجهندی حذف نمود

زیرا بنا بر اصل ۱ میتوان این عبارت مساوی را از دو طرف کم کرد چنانکه دو طرف

$$\text{بجهندی} \quad x^2 - 1 - a = 5x + x^2 - 2x - a = 5x + x^2 - a \quad \text{دارای دو جمله} \quad x^2 \text{ و } a$$

است میتوان این دو جمله را حذف کرد بجهندی بصورت ساده $5x - 1 - 2x = 5x - 2x - 1$

درمیان

این عبارتی را از یک طرف بچندی بطرف دیگر نبرد بشرط اینکه نشانه آن را
براشل این است که آن عبارت را از دو طرف کم کرده باشیم

ندی $x - \alpha = 2\alpha$ چون α - را طرف دیگر بریم این بچندی بد

$$x = 2\alpha + \quad \text{و یا} \quad x = 2\alpha$$

$$x^2 - 2x = 2x^2 - 4 \quad \text{بچندی} \quad 2x - 1 + x^2 = 2x^2 - 4$$

$$x^2 - 2x = 2x^2 - 4 \quad \text{و یا} \quad 2x = x^2 - 2 \quad \text{هم از راست دین}$$

$$x^2 - 1 \quad \text{را بطرف دوم بردیم}$$

پرسش های ساده

ی زیر را حل کنید .

$$x - 1 = 2 \quad 2 + \alpha = 6 \quad y + 2 =$$

$$-4 + 2 = 2 \quad x - 2 = -2 \quad x + 11 =$$

$$x + 2 = 2 \quad 2 + 11 = 0 \quad x - 5 =$$

$$-2 + y = -2 \quad 12 = 5 - 8 \quad 0 = 5 -$$

اصل ۲- چون دو طرف بچندی را در عددی جبری ضرب
که حاصل میشود با بچندی مفروض هم از راست

۱- همیشه بچندی $\frac{x}{3} = 2$ را تعیین کنید

ل ۲ دو طرف را در ۳ ضرب میکنیم نتیجه میشود

-۱۰۴-

$$x = 6$$

پرشش های شفاهی

ریشه هس، هچندی را بدست آورید:

$$\frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = -6$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{1}{y}$$

$$-1 = \frac{x}{y}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{x}{y} = -2$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x}{1}$$

$$-\frac{x}{y} = -\frac{1}{1}$$

$$-\frac{x}{y} = -\frac{x}{y}$$

۹۷- اصل ۳- هرگاه دو طرف هچندی را در يك عدد جبری (بجز صفر) تقسيم كنيم ريشه هچندی تغيير نهي كند

مثال - هچندی $x = 10$ را حل كنيد

بنا بر اصل ۲- مي توان دو طرف را بر ۵ تقسيم نمود و نتيجه مي شود

$$x = 2$$

پرشش های شفاهی

هچندی های زير را حل كنيد

$$6x = 12$$

$$-3x = 15$$

$$56 = -16x$$

$$1x = 24$$

$$-12 = 2m$$

$$11 = 5y$$

$$2x = -28$$

$$12y = 11$$

$$-125 = -25x$$

$$5x = 2$$

$$-2x = 24$$

$$-13y = -26$$

مثال ۱- بچندی زیر را حل کنید

$$5x - 2 = 2x + 7$$

بنا بر اصل ۱ از دو طرف $2x$ تفریق می کنیم نتیجه میشود

$$3x - 2 = 7$$

بعد ۲ یک بر دو طرف می افزایم (و یا آنکه ۲ را بطرف دوم میبریم موافق نتیجه ۲ نفر ۱۵)

$$3x = 9$$

حاصل میشود
حال دو طرف را بر ۳ تقسیم میکنیم (موافق اصل ۳) نتیجه میشود

$$x = 3$$

مثال ۲- این بچندی را حل کنید

$$\frac{2x}{5} - 2 = x + 4$$

اول دو جمله مشابه ۲ و ۴ را دو طرف را ساده میکنیم یعنی بنا بر اصل اول ۲ را بطرف دوم

$$\frac{2x}{5} = x + 6$$

میبریم حاصل میشود

بنا بر اصل ۲ دو طرف را در ۵ ضرب می کنیم این بچندی بدست می آید

$$2x = 5x + 30$$

بعد $5x$ را بطرف اول میبریم (باید نشانه آنرا تغییر داد) نتیجه میشود

$$-3x = 30$$

باین ترتیب یکطرف فقط دارای مجهول طرف دیگر فقط دارای مقدار معلوم شده است حال اگر دو طرف را برضرب مجهول تقسیم کنیم مقدار مجهول بدست میآید:

$$x = -15$$

پرسش های شفاهی

بچه های زیر را حل کنید:

$$\frac{x}{2} = 6$$

$$2x - 7 = 2$$

$$8x + 2 = 10$$

$$2x + 2 = 0$$

$$8x = 16 + 2x$$

$$\frac{x}{5} = 4$$

$$5x - 2 = 12$$

$$7x + 7 = -12$$

$$-6x = -18$$

$$7x - 2 = 12$$

$$2y - 4 = 5$$

$$\frac{4x}{3} = -4$$

۹۸- بچه های یک مجهولی درجه اول - بر گاه یک بچه ای پس از چهار بار بردن اصله

به صورت $ax = b$ درآید گویند آن بچه ای یک مجهولی درجه اول است (x مجهول

و a و b معلوم های بچه ای اند)

۹۹- قاعده برای حل بچه های یک مجهولی درجه اول - بنا بر آنچه

گفته شد برای حل بچه های یک مجهولی درجه اول بستر این است که عمل های زیر را منظم

اجرا کنیم:

نخست - ساده کردن جمله های مشابه در دو طرف بچه ای از روی اصل بقسمی که

جمله های دو طرف پس از این عمل با هم متناسب نباشند

دویم - ازین ترتیب ضرایب را به ضرب و طرف بچه ای در کو حلقه بین مضرب آنها

از ردی اصل ۲) از بچندی برته باشد

سوم - بردن جمله های مجهول به طرف و معلوم را به طرف دیگر (از ردی اصل ۱)

چهارم - جمع جمیع جبری جمله های هر طرف

پنجم - تقسیم دو طرف بر ضریب مجهول (بنا بر اصل ۳)

عین این قاعده در مثال ۲ از شماره پیش بکار رفته است

مثال - مطلوب است حل $6x - 7 = 3x + 2$ جمله $3x$ را به طرف اول

و ۷ - را به طرف دوم میسریم نتیجه میشود

یا $3x = 9$ و $6x - 3x = 2 + 7$

و پس از تقسیم دو طرف بر ۳ (ضریب مجهول) حاصل میشود $x = 3$

تمرین

بجذبیبای زیر را حل کنید:

$$2x + 2 = 6 + x$$

$$a + 14 = 2 - 3a$$

$$4t + 2 = 2t$$

$$4t + 2 - t + 5 = t - 10$$

$$5y - 1 = 2y + 5$$

$$4k - 3 = 5k - 16 + 4k - 2$$

$$x - (8 - x) = 10$$

$$5z - (2 + 2z) = 9 - 4z$$

$$9x - 22 - 2x = 100 - 11x - 22$$

$$2^3 - 2^2 = 2^2 - 1$$

$$2^2 - 2 + 1 = 2^2 + 2 - 1$$

$$2x^2 - 2x + 7 = 2x^2 + 5x - 15$$

$$2x + 29 - 25x = 22 - 20x - 8$$

$$4y + 6 - 2y + 1 = 2y + 2 - 2y - 1 + 5y$$

$$2x - 9 = 1x + 10 = 15 + 5x - 2$$

$$5x + 10 + 8x - 2 + 3x = x - 2$$

$$13 + 17a + 11 - 10a = 10a - 11 - 12a - 12$$

$$2x + 6 - (4 - 7x) = 19x - (11x - 2)$$

$$a^2 - (2a - 2) = 6 - (2 - 2a) + a^2$$

مثال - مطلوب است حل بچندی

$$\frac{2x}{6} - 6 + \frac{2x}{1} + \frac{15}{4} = 14 + \frac{x}{6}$$

پس از ساده کردن جمله های مشابه دو طرف $(\frac{2x}{6})$ و $\frac{x}{6}$ همچنین ۶- و ۱۴+ نتیجه میشود

$$\frac{x}{6} + \frac{2x}{1} + \frac{15}{4} = 20$$

و دو طرف این بچندی را در عدد ۱۲ (کوچکترین مضرب بر خه ما) مضرب می کنیم این بچندی بدست می آید

$$4x + 9x + 90 = 240$$

$$x = 30 \quad \text{و از اینجا} \quad 13x = 390 \quad \text{دریا}$$

تمرین

پنجیدهای زیر را حل کنید

$$\frac{2x}{5} + \frac{2x}{3} = 19$$

$$\frac{5x}{3} + \frac{2x}{4} - 26,25 = 0$$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{2y}{3} - \frac{y}{2} + \frac{2y}{5} = 29$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 15 - x$$

$$\frac{2x}{3} - 1 = \frac{29x}{11} + \frac{4}{5} - \frac{2x}{4} - \frac{44}{5}$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{5x}{11} = \frac{5x}{9} + 6 - \frac{2x}{9}$$

$$y - \frac{2y}{3} + 9 = \frac{2y}{3} + 4 + \frac{5y}{6} - \frac{6y}{5} + \frac{1}{5}$$

$$2x - 3 = 2,25x - 5 - 7,4x + 2,6$$

$$\frac{a}{3} - \frac{a}{4} + \frac{a}{5} - \frac{a}{6} + \frac{a}{8} + \frac{a}{12} = 11$$

$$b = 1 + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{16} + \frac{b}{24}$$

۷- ضرب عبارتهای زیری

۱۰۰- فرض کنی کنیم مقصود بدست آوردن حاصل ضرب یکجمله $5d^2$ و یک جمله

یکجمله $3d^2$ باشد این حاصل ضرب را میتوان نوشت $5d^2 \times 3d^2$ و چون هر یک جمله

تشکیل شده است از حاصل ضرب چندسازه بنا براین حاصل ضرب مشابهت با حاصل ضرب

سازه های آن خواهد بود یعنی:

$$- 2d^2 \times 5d^2 = - 2 \times 5 \times d^2 \times d^2$$

و چون میتوان در حاصل ضرب چند سازه جای آنها را به نحو ادقی تفسیر داد پس این حاصل ضرب را میتوان چنین نوشت:

$$-۳ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times ۵ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} = -۳ \times ۵ \times \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}$$

$$-۳ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times ۵ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} = -۱۵ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \quad \text{و یا بنا بر ضرب توانها}$$

روشن است که این ت س و ی بازاء هر عدد که بجای حرف با گذارد شود درست است.

$$۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times ۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} = ۴ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \quad \text{بمنظور}$$

$$۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times (-۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}) = -۴ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}$$

$$-۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times ۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} = -۴ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}$$

$$-۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} \times (-۲ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}) = ۴ \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}}$$

یعنی در ضرب دو یا چند یک جمله قاعده نشاء بکار میرود
از بیان بالا قاعده زیر بدست میاید:

۱۰۱- قاعده- حاصل ضرب دو یا چند یکجمله خود یکجمله است که ضریب

حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یکجمله ها (باقید نشانه) بوده و تمام حرفهای

آن یکت جمله ها را داشته باشد نمای هر یک از این حرفها مساوی

مجموع نمای آنهاست که آن حرف در هر یک جمله دارد

$$\text{مثلاً} \quad (-۲\sqrt{۳} \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} y) (-۲\sqrt{۵} \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} y) = ۴\sqrt{۱۵} \overset{a}{\underset{b}{\overset{c}{\times}}} y^2$$

پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید:

$$2a^2(-4ax) \quad 2ax \cdot 2x^2 \quad (-2x)(2x^2)$$

$$(-2\sqrt{2})(-5\sqrt{6}) \quad 5ay(-2ay) \quad (-2ax)(2ax)$$

$$(-2z)^2 \quad (-2a)^2 \quad 2x^2(-x)^2$$

$$(-2\sqrt{2}x)^2 \quad (-\sqrt{2}xy)^2 \quad (2\sqrt{2})^2(-a)^2$$

$$(-2x)^2(ax)(-5ax^2)$$

۱۰۲- ضرب یکجمله در چندجمله - چون بجای حرفها مقدار عددی گذاریم چندجمله

حرفی تبدیل مجموع جبری چند عدد میشود و یک جمله تبدیل بیک عدد پس برای ضرب یکجمله

در چندجمله میتوانیم مانند ضرب یکعدد در مجموع جبری چند عدد (نمره ۴۹) عمل کنیم ازینقرار:

یک جمله مفروض را در هر یک از جمله های چندجمله ضرب کرده حاصل ضربهای
جز را با هم جمع می کنیم

$$\text{مانند} \quad (2a^2 - 3ax + 4x - 6) \times 2ax =$$

$$2a^2 \times 2ax + (-3ax) \times 2ax + 4x \times 2ax + (-6) \times 2ax =$$

$$4a^3x - 6a^2x^2 + 8ax^2 - 12ax$$

تمرین

خارجتهای زیر را ساده نموده بازاء $a = -2$ ، $b = -1$ و $c = 0$

دستی عمل را تحقیق کنید $y =$ و $z = 1$

برای نوز این مثال عمل می‌نماید

مثال - بنویسیم عبارت $x^2(x-y) - y(-2x^2+y)$ را ساده نموده، باز مقدار عددی عددی

x و y در شکل را تعیین کنیم

راه حل چنین است :

$$\begin{aligned} x^2(x-y) - y(-2x^2+y) &= 2x^3 - 2x^2y + 2x^2y - y^2 \\ &= 2x^3 - y^2 \end{aligned}$$

پس با $x=1$ و $y=2$ مقدار عددی حاصل $2(1)^3 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$

است

مقدار عددی عبارت مفروض نیز

$$2(1-2) - 2(-2+2) = -2 - 2(0) = -2$$

باشد

$$xy(a-b) - ab(x-y) + bc(a-x)$$

$$= a[x(ax-by) - y(bx-ay)]$$

$$= a\sqrt{x} (ab-b\sqrt{x} - \sqrt{x}) - ac\sqrt{y} (cy-\sqrt{y})$$

$$= a\sqrt{x} (a^2 - 2b\sqrt{x}) - (c^2a - 2b\sqrt{x})$$

$$= bc [(a-c) - ab(a-b)]$$

$$x^2(a+b) - b(a-c) + a(b-x) - c(x-y)$$

مثال - مطلوبست محاسبه عبارت:

$$P = \sqrt{3} \left[4\sqrt{12} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{75} - \sqrt{48}) \right]$$

ابتدا پرانسته درون کروشه را حذف میکنیم بعد $\sqrt{3}$ را در هر یک از جمله های درون آن ضرب

میکنیم نتیجه میشود

$$P = 4\sqrt{36} - 2\sqrt{9} - \sqrt{225} + \sqrt{144}$$

چون $\sqrt{36} = 6$ و $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{225} = 15$ و $\sqrt{144} = 12$

بنابراین

$$P = 24 - 6 - 15 + 12 = 15$$

و نیز درین مثال میتوان پیش از ضرب در $\sqrt{3}$ هر کدام از راویکال های درون کروشه را ساده نمود بعد

حاصل کروشه را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم از نیفتد از:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت P چنین میشود

$$P = \sqrt{3} (4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 15$$

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} (3\sqrt{18} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72}) \\ & (2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48})\sqrt{2} \\ & \sqrt{2} (5\sqrt{24} - 4\sqrt{24} + 2\sqrt{50} - 2\sqrt{54}) \\ & 4\sqrt{2} (\sqrt{2} + 2\sqrt{18}) - \sqrt{6} (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \\ & 5\sqrt{2} (2\sqrt{2} + 10\sqrt{5}) - 2\sqrt{5} (2\sqrt{2} - 5\sqrt{5}) \\ & 2\sqrt{2} [(2\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) - (2\sqrt{18} - 4\sqrt{20})] \\ & 4\sqrt{10} [2\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - (2\sqrt{18} + 2\sqrt{5})] \end{aligned}$$

۲- درآمد ۱۳ روزه شخصی ۵ ریال است و خارج ۷ روزه او ۳ ریال تعیین کنید از خانه

و درآمدت x روز و قسید ۹۶ ریال و ۲۸ ریال و ۱۵ ریال x باشد
او را بدست آورید

۳- برسید و بحر آب داخل استخری شود اولی در هر ساعت ۵ ذرع کعب و دومی در هر

ساعت ۳ ذرع کعب آب داخل آن میکند این استخر دارای زیر آب است که در هر چهار ساعت ۵ ذراع

کعب آب آنرا خارج مینماید معلوم کنید اگر هر سه یکریز باشند در x ساعت چند ذرع کعب آب
داخل استخر میشود

مثال - مطلوبست حل بچندی

$$2x(x-1) = 2x^2 + 4x - 1$$

$$2x^2 - 2x = 2x^2 + 4x - 1$$

پس از ضرب نتیجه میشود

دیس از ساده کردن جمله های متشابه و دو طرف این معجزی بدست می آید

$$x = \frac{1}{6} \quad \text{و از آنجا} \quad 6x = 1$$

تمرین

معجزیهای زیر را حل کنید:

$$2(x+1) - 4 = 2(x-1) \quad 4(2y-5) + 10 = 2(y+9)$$

$$9x - 2(2x-4) = 2(5-x) + 7$$

$$2y - 9(2y+4) = 2(y+9)$$

$$5(2a-1) - 7a = 3(a+6) - 4$$

$$x - 2(2x-3) - (x+6) = 8 - 7(2-x)$$

$$7(3x-6) + 5(x-2) + 4(12-x) = -11$$

$$2x(x-2) + 5x = x(3x-4) + 4$$

$$2y - (5y - y + 1) = -(2+y) + 15$$

مثال - مطلوبست حل معجزی

$$\frac{5}{6}(x - \frac{1}{3}) + \frac{7}{6}(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}) = 4 + \frac{1}{9}$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{18} + \frac{7}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{44}{9}$$

دو طرف این معجزی را در عدد ۹۰ که کوچکترین مضرب برخه آنها است ضرب

میکنیم حاصل شود

$$۷۵x - ۲۵ + ۲۱x - ۱۵ = ۴۴۰$$

$$۷۵x + ۲۱x = ۴۴۰ + ۲۵ + ۱۵$$

$$۹۶x = ۴۸۰$$

و یا پس از ساده کردن جمله های مشابه نپخته میشود

$$x = ۴۸۰ : ۹۶ = ۵$$

و از آنجا

تمرین

این مجموعه را حل کنید:

$$\frac{1}{4}(۲۷-x) = \frac{7}{7} + \frac{1}{10}(۷x-۵)$$

$$۱ - ۲(۷\frac{1}{7} + x) + ۷(\frac{۷x}{7} - \frac{۵}{7}) + \frac{۱x}{7} = ۵$$

$$\frac{x-۱}{7} - \frac{۲۲-x}{۵} = \frac{x+۶}{7} - ۶$$

$$\frac{۸-x}{۶} + x - ۱ - \frac{۲}{7} = \frac{x+۶}{7} - \frac{x}{7}$$

$$\frac{۵۵-۲}{7} - \frac{۵-۱}{7} = \frac{۵+۱۴}{7} - ۲$$

$$\frac{۵۳-۲}{7} - \frac{۴-۵}{7} = \frac{۱۹-۲۶}{7} - ۱$$

$$\frac{۲x-۵}{7} - \frac{۵x-۲}{7} + ۲ - \frac{۲}{7} = ۰$$

$$\frac{۲x+۱}{7} + \frac{۲x-۵}{7} = ۲ + \frac{۲x-۱}{۱۵}$$

$$\frac{۲x+۱}{۱۳} + \frac{۲x-۵}{7} = \frac{۲x-۱}{۵} + \frac{۲-۲}{7}$$

$$\frac{۲x-۱}{۱۰} - \frac{۲-۲}{7} + \frac{۲x+۱}{۶} = ۶ - \frac{۱}{۶}$$

$$\frac{2-2x}{3} - \frac{2-x}{4} = \frac{2x-2,15}{1/5}$$

$$\frac{5x-24}{12} + \frac{1,2-2x}{2} = \frac{1,1-18x}{12}$$

$$\frac{5x-1,5}{7} - \frac{5(24-2x)}{6} = \frac{9x-27}{4} - \frac{7x-1,1}{3}$$

$$\frac{2(12x-24)}{5} + \frac{3(1,2-x)}{1} = \frac{9x+27}{20} + \frac{5+7x}{4} + 5$$

۱۰۳- ضرب دو چند جمله - چون بجای حرفها مقدار عددی قرار دیم چند جمله

حرفی تبدیل بحذف جمله عددی میشود بنابراین برای ضرب دو چند جمله میستوان قاعده (نمره ۵) بکار برد:

۱۰۴- قاعده ضرب دو چند جمله - باید هر یک از جمله های یکی از آنها در کلیه جمله های چند جمله دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جزوه را جمع جبری نمود.

راه حل از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱- مطلوبست تعیین حاصل ضرب $2x - 5$ در $3x + 2$ باشد

حساب کی ازین دو سازه را زیر سازه دیگر نوشته عمل کنیم بدین طریق:

$$\begin{array}{r} 2x - 5 \\ 3x + 2 \\ \hline 6x^2 - 15x \quad \dots\dots\dots 3x \quad \text{در} \quad 2x - 5 \\ + 4x - 10 \quad \dots\dots\dots + 2 \quad \text{در} \quad 2x - 5 \\ \hline 6x^2 - 11x - 10 \quad \dots\dots\dots \text{مجموع حاصل ضربهای جزوه و حاصل ضرب کل} \end{array}$$

برای آسانی عمل چنانکه می بینید بهتر آنستکه در نوشتن حاصل ضربهای جزوه جمله های مثبت

آنها زیر یکدیگر نوشته شود

مثال ۲- عبارت $۲۵^۲ - ۷ - ۴۵ + ۳۵^۲$ را عبارت $۵^۲ - ۶ - ۵۵$

ضرب نموده بازار $۵ = ۲$ درستی عمل را امتحان کنید

برای آسانی این عبارتها را بحسب توانهای صعودی یا نزولی ۵ مرتب نموده مانند مثال

عمل میکنیم مثلاً اگر این دو سازده را بحسب توانهای نزولی ۵ مرتب کنیم خواهیم داشت

$$\begin{array}{r} ۲۵^۲ + ۳۵^۲ - ۴۵ - ۷ \\ ۵^۲ - ۵۵ - ۶ \end{array} \quad \begin{array}{r} = ۱۶ + ۱۲ - ۸ - ۷ = ۱۳ \\ = ۴ - ۱۰ - ۶ = -۱۲ \end{array}$$

$$\hline ۲۵^۲ + ۳۵^۲ - ۴۵^۲ - ۷۵^۲ \quad -۱۵۶$$

$$-۱۰۵^۲ - ۱۵۵^۲ + ۲۰۵^۲ + ۳۵۵$$

$$-۱۲۵^۳ - ۱۸۵^۲ + ۲۴۵ + ۴۲$$

$$\hline ۲۵۵ - ۷۵۵ - ۳۱۵^۳ - ۵۵^۲ + ۵۹۵ + ۴۲ \quad \text{حاصل ضرب}$$

که بازار $۵ = ۲$ حاصل ضرب چنین میشود

$$۶۴ - ۱۱۲ - ۲۴۸ - ۲۰ + ۱۱۸ + ۴۲ = -۱۵۶$$

ازین دو مثال اول عمل ضرب و چند جمله بدست میآید ازین قرار:

اول دو چند جمله را بحسب توانهای نزولی یا صعودی یکی از حرف ۵ مرتب نموده آنها را

زیر هم بنویسیم (بهتر آنست که چند جمله کوچکتر یعنی آنکه عدد جمله هایش کمتر است زیر چند جمله دیگر نوشته

شود) بعد هر یک از جمله های پایین را در جمله های بالا ضرب میکنیم و این حاصل ضربها را

هر که هم در یک سطر و زیر یکدیگر طوری بنویسیم که جمله های مشابه در یک ستون قرار گیرد بنظر آید

عمل جمع جمله های مشابه آسان میشود، بعد از جمع حیرت جمله های هر ستونی حاصل ضرب به دست میآید

تمرین

حاصل ضربهای زیر را بدست آورید:

$$2x^2 - 2x - 1$$

"

$$2x - 4$$

$$2y^2 - 1y - 1$$

"

$$y^2 + 2y - 2$$

$$x^2 - x - 5$$

"

$$x^2 - 2x + 4$$

$$2a^2 - 5a + a + 1$$

"

$$5 - a^2 + a$$

$$5x - 2a - (2a - 5x)$$

"

$$5x - 2a + (2a - 5x)$$

$$2a - 4a^2 + 4 + a^2$$

"

$$2 + a^2 - 2a + 2a^2$$

$$(a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a-b+1)^2$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) ; (a-b)^2 ; (a+b)^2$$

$$(x^2y - xy^2)(x^2y + xy^2) ; (a-b)(a+b)$$

$$(x^2y - xy^2)(2xy - 4x^2y)(2x^2y - xy^2)$$

$$(m^2 + p^2 + q^2 - mp - mq - pq)(m + p + q)$$

مثال - مطلوبست حل یخدی

$$(2x - 1)(2x + 5) = (2x + 2)^2 + 2x^2 - 12$$

پس از نقل و جابجایی می شود

$$4x^2 + 12x - 5 = 4x^2 + 12x + 4 + 2x^2 - 12$$

و چون جذای مشابه دو طرف را ساده کنیم حاصل میشود

$$x = 1$$

تمرین

بجذایای زیر داخل کنید:

$$(x-4)(x+1) = 7 - (x-2)(x+3)$$

$$(x+2)^2 - (x+3)^2 = -17$$

$$(3x-6)(4x-1) = 12x^2 - 96$$

$$(x+2)(x+5) = (x+15)(x-10)$$

$$(2y-2)(2y+4) = (y-1)^2 + 5y^2 - 11$$

$$(x-5)(x+3)(x+2) - 5 = (x^2 - x - 1)(x+1)$$

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) - (x+2) = (x^2 + 2)^2 + 20$$

د- بخش دو عبارت جبری

۱۰۵- تعریف - غرض از بخش کردن تقسیم کردن عبارت جبری a (بخشی‌ناپذیر)

بر عبارت جبری b (بخشی‌پذیر یا مقوم علیه) پیدا کردن عبارتیت مانند c (بهر یا خارج قسمت) بقسمی که حاصل ضربش در b مساوی a گردد

پس با تعریف بالا این اتحاد را خواهیم داشت

$$(1) \quad a = bc$$

و چون خارج قسمت α بر g را می توان بصورت $\frac{a}{g}$ نوشت

پس خواهیم داشت $(۲) \quad c = \frac{a}{g}$

یعنی خارج قسمت α بر g بر $\frac{a}{g}$ است که هرگاه آنرا در بخش یاب (g) ضرب کنیم

بخشی (α) بدست می آید

بنابر این دوتای (۱) و (۲) از یکدیگر نتیجه اند

مثال:

$\Delta x \cdot x = \Delta x$ زیرا $\Delta x : x = \frac{\Delta x}{x} = \Delta$

$\Delta x \cdot x^2 = \Delta x^2$ $\Delta x^2 : x^2 = \frac{\Delta x^2}{x^2} = \Delta x$

$-2 \Delta x^2 \cdot \Delta^2 = -2 \Delta^5$ $-2 \Delta^5 : \Delta^2 = \frac{-2 \Delta^5}{\Delta^2} = -2 \Delta^3$

$\frac{3}{4} x (-4) = -3$ $-3 : -4 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$mnp^2 \cdot mp^2 = \frac{mnp^2}{mp^2} = m \cdot n \cdot p^2 = mnp^2$ همچنین

$mnp \cdot mp^2 = mnp^2$ زیرا

$12 \Delta x^2 y : -5 \Delta x y = \frac{12 \Delta x^2 y}{-5 \Delta x y} = -\frac{12}{5} \Delta x$ و

$-\frac{12}{5} \Delta x \cdot (-5 \Delta x y) = 12 \Delta x^2 y$ زیرا

۱۰۶- برای یافتن ساده ترین عبارت بر (یعنی ساده ترین عبارت $\frac{a}{g}$

بفره ۱۰) را بکار می گیریم که هرگاه بخشی و بخش یاب را در سازه ای ضرب یاب سازه ای

تقسیم کنیم به تغییر نمی کند

چنانکه بحر $\frac{5x}{2}$ را میتوان بصورت ساده نوشت (از تقسیم بخشی بخش یاب بر x)
و همچنین در بخش $25x$ بر $5x$ بهر مساویست با $5x$ (از تقسیم کردن بخشی بخش یاب بر $5x$)
درین دو بخش می بینیم که ساده ترین صورت بهر عبارت صحیح

و در تقسیم $5x$ بر $25x$ ساده ترین صورت بهر برخاست مساوی $\frac{1}{5}$ می باشد

و در تقسیم $5x$ بر $25x$ بحر $\frac{5x}{25x}$ است که بهیچ ساده نمیشود
اینک برای بدست آوردن ساده ترین صورت خارج قسمت عبارت جبری نشان
و زیر را در نظری گیریم:

۱۰۷- حالت اول - تقسیم یک جمله بر یک جمله - برای بدست آوردن ساده

ترین عبارت بهر کافیت که بخشی بخش یاب را بر ساده های مشترک تقسیم کنیم

$$\text{مانند } \frac{-2ax^2}{a} = -2ax \quad \text{و} \quad \frac{5a^2}{a^2} = 5a \quad \text{و} \quad \frac{-7x^2}{-5ax^2} = \frac{7x^2}{5ax^2}$$

$$\text{و} \quad \frac{12ax^2}{-12ax^3} = -\frac{2a^2}{2x} \quad \text{ازین چند مثال معلوم میشود:}$$

هرگاه بخشی مثال همه ساده های بخش یاب با نمای بزرگتر یا مساوی باشد بصورت بهر
یک جمله درست میشود (مانند دو مثال اول) و در غیر این حالت بهر برته خواهد بود (مانند
مثالهای سوم و چهارم).

پیشش های شفا بی

در هر یک از بخش های زیر بحسب را بدست آورید:

$$\frac{5}{2} \quad \text{بر} \quad \frac{1}{5} \quad \text{بر} \quad \frac{1}{2} \quad \text{بر} \quad \frac{1}{5}$$

-۱۲۳-

$$\begin{array}{cccc}
 -x^8 & , & -x^7 & , & xy^7 & , & -xy^8 \\
 15ax^7 & , & -2bx^7 & , & -12ab^6 & , & -2ab^7 \\
 -38xy^6 & , & -1^6xy^5 & , & -20a^5b^6 & , & -15a^5b^7 \\
 -45a^6xy^4 & , & -9a^6xy^5 & , & -23a^6xy^5 & , & -3a^6xy^6 \\
 2a^7 & , & -2b^7 & , & 5ax^7 & , & -10bx^7 \\
 -3xy^7 & , & -15xy^7 & , & 24x^2ab^6 & , & 12x^2ab^7
 \end{array}$$

۱۰- حالت دوم- تقسیم چند جمله بر یک جمله- بر یک از جمله های بخش را بر بخش یاب تقسیم نمود (موافق مندر پیش) ، برای جز را جمع جبری میبایم مثال ۱- در تقسیم $x^4 - x^2$ بر x^2 به چنین است

$$\frac{x^4 - x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = x^2 - x^0$$

زیرا

مثال ۲- تقسیم $12x^3 - 3x^2y + 15xy^2 - 3xy^3$ بر $-3xy$ به چنین است

$$\frac{15xy^2}{-3xy} + \frac{-3x^2y^2}{-3xy} + \frac{12x^3}{-3xy} = -5y + xy - 4x^2$$

پیش های ششایی

مطلوبت تقسیم برای زیر:

$$\frac{x^2y - x^2}{x^2}$$

,

$$\frac{5x^2 - 5x}{2x}$$

,

$$\frac{10ax - 10ax^2}{-2ax}$$

$$\frac{25x^2y - 20x^2y^2}{-5xy}$$

$$\frac{a(x+y)+b(x+y)}{x+y}, \quad \frac{r(a+b)-r(a,b)}{a+b}$$

$$\frac{ra(2x-4)-ra(2x-4)}{2x-4}$$

$$\frac{x-y-r(x-y)}{-2(x-y)}, \quad \frac{\sqrt{2x^2}-2\sqrt{2xy}}{\sqrt{2x}}$$

$$\frac{abx-aby}{abx}, \quad \frac{\sqrt{6}(m-2)-\sqrt{3}(m-2)}{\sqrt{2}(m-2)}$$

$$\frac{K(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2K(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{K(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

۱۰۹- حالت سوم - تقسیم چند جمله بر چند جمله - برای تعیین صورت ساده

به درین حالت مانند حساب عمل تقسیم را بجا می آوریم

فرض میکنیم مقصود بخش کردن عدد ۹۹۲ بر ۳۱ باشد صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{r} 992 \quad | \quad 31 \\ - 92 \quad | \quad 32 \\ \hline 62 \\ - 62 \\ \hline \end{array}$$

$$992 = 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2$$

و چون

$$21 = 3 \times 10 + 2$$

میتوان تقسیم بالا را بدین صورت نوشت

$$\begin{array}{r} 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2 \quad | \quad 3 \times 10 + 2 \\ - 9 \times 10^2 - 3 \times 10 \quad | \quad 3 \times 10 + 2 \\ \hline + 6 \times 10 + 2 \\ - 6 \times 10 - 2 \\ \hline \end{array}$$

سومین تقسیم اگر بجای ۱۰ عدد یکی a را قرار دهیم معلوم میشود که در تقسیم چند جمله $9a^2 + 9a + 2$ بر $2a + 1$

بهر مساوی $2a + 2$ باشد

ضرورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r|l} 9a^2 + 9a + 2 & 2a + 1 \\ \hline -9a^2 - 2a & \\ \hline +6a + 2 & \\ -6a - 2 & \\ \hline & \end{array}$$

ازین مثال میسران قاعده زیر را نتیجه گرفت :

۱۱- قاعده - پس از ساده کردن چند جمله های مقسوم و مقسوم علیه آنها نسبت بتوانهای نزولی (یا صعودی) یکی از طرفها مرتب نموده بطریق زیر عمل مینماییم :

جمله اول بخش را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر ادر تمام جمله های بخش یاب ضرب می نماییم و حاصل را از جمله های بخش می کاهیم تا شصتین مانده بدست آید از نو جمله اول مانده را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر ادر تمام جمله های بخش یاب ضرب مینماییم و حاصل را از جمله های این مانده کم می کنیم تا دین مانده بدست آید و همین طریق عمل را ادامه میدهیم تا به مانده صفر یا با مانده ای برسیم که درجه اش از درجه بخش یاب کمتر باشد .

مثال ۱- مطلوبست تعیین بهر در تقسیم $a^3 + 2a^2b - b^3$ بر $a + b$

چون چنانچه بخش یاب را بر حسب حرف a مرتب نموده از روی قاعده بالا مثل کنیم میشود

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ab - b^2 & a+b \\ -a^2 - ab & -b^2 \\ \hline ab & \\ -ab - ab^2 & \\ \hline -ab^2 - b^3 & \\ +ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

در این بخش بخشی بر بخش یاب بخش پذیر (قابل قسمت) بوده و میتوان چنین نوشت

$$a^2 + 2ab - b^2 = (a+b)(a+ab-b^2)$$

مثال ۲- a^3 را بر $a-1$ تقسیم کنید

(از روی قاعده بالا راه عمل چنین است)

$$\begin{array}{r|l} a^3 & a-1 \\ -a^2+a & \\ \hline +a^2 & \\ -a^2+a & \\ \hline +a & \\ -a+1 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

درین مثال بهر آنکه بصورت $\frac{a^3}{a-1}$ است میتوان چنین نوشت

$$\frac{a^3}{a-1} = a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$$

زیر آنکه دو طرف بهر را در $a-1$ (بخش یاب) ضرب کنیم a^3 (بخشی) بدست میآید

در اینجا میگوییم بخشی بر بخش یاب بخش پذیر نیست بهرینجه

$$a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$$

تشکیل شده است از جز درست $a + a + 1$ و جزء برخط $\frac{1}{a-1}$ عدد $a + 1$ را مانده این تقسیم گویند.

بتصوره - فرض میکنیم q جزء درست بر R مانده تقسیم A بر B باشد بنا بر آنچه گفتیم خواهیم داشت:

$$(۱) \quad \frac{A}{B} = q + \frac{R}{B}$$

اگر بخصوص $R = 0$ باشد تقسیم درست است و خواهیم داشت

$$\frac{A}{B} = q$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را در B ضرب کنیم این تساوی بدست میآید

$$(۲) \quad A = Bq + R$$

یعنی بخشی مساویست با مجموع مانده و حاصل ضرب بخش یاب در جزء درست

بر

و در حالتیکه مانده صفر باشد تساوی (۲) نوشته میشود

$$A = Bq$$

یعنی بخشی مساویست با حاصل ضرب بخش یاب در بر

تمرین

در هر یک از تقسیمهای زیر بر را بدست آورید

$$a + 2$$

بر

$$a^2 + 10a + 22$$

$$x^2 + 1 \quad , \quad x^2 - 2x - 2$$

$$x - 2 \quad , \quad x^2 + x - 6$$

$$y + 2 \quad , \quad y^2 - 11y - 6$$

$$2y - 1 \quad , \quad 4y^2 + 11y - 7$$

$$2a - b \quad , \quad 2a^2 + ab - 2b^2$$

$$2x - 2y \quad , \quad 4x^2 + 6xy - 1y^2$$

$$2a - 2b \quad , \quad 2a^2 + ab - 2b^2$$

$$2a - 2 \quad , \quad 2a^2 - 14a^2 + 14a - 12$$

$$2x - 2 \quad , \quad 27x + 6x^2 - 14 - 22x^2$$

$$y - 2y^2 - 2 \quad , \quad 2y^4 + 11y^3 - 2y^2 + 17y - 2$$

$$21x^2 - 9 \cdot xy^2 + 156xy^2 + 9xy^2 + 21y^4$$

$$4x^2 - 10xy \quad , \quad (4a^2 - 7a - 1) \quad , \quad (52a + 1 - 52a^2 + 12a^3)$$

$$(x^2 + 1) : (x + 2) \quad , \quad (x^2 - y^2) : (x \pm y)$$

$$(27x^3 + 1y^3) : (2x + 2y) \quad , \quad (x^2 - 16) : (x \pm 4)$$

$$(a^2 \pm b^2) : (a \pm b) \quad , \quad (y^2 \pm 1) : (y \pm 1)$$

۱۱۱- پنجاه و یکم یهای عربی - هرگاه در یک پنجاه و یکم یهای عربی صورت کلی نیاید

بصرف نموده شده باشد پنجاه و یکم یهای عربی نامند

بر بچندی حرفی درجه اول پس از از چپن بردن برضهاها و ساده کردن جمله های مثلث به دو طرف

بصورت کلی $ax - b$ در یاید

برای حل این بچندی یعنی برای تعیین x ریشه آن باید دو طرف را بر a (ضرب x)

تقسیم نمود (a باید مخالف صفر باشد)

مثلاً: از تقسیم دو طرف تساوی $0 \times 5 = 0 \times 7$ بر صفر لازم میاید که $0 = 7$

باشد که محال است

بنابر این نباید بچقت دو طرف یک تساوی را بر صفر تقسیم نمود زیرا علاوه بر اینکه بی فایده است در تقسیم یک عدد بر صفر بهر را بدست آورد ممکن است نتیجه غلطی بدید

مثال ۱- مطلوبست حل بچندی

$$5x - 2a = 10a + 3x$$

مجمول را بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود

$$5x - 3x = 10a + 2a$$

$$2x = 12a \quad \text{و از آنجا} \quad x = 6a$$

مثال ۲- مطلوبست حل بچندی

$$5x + 5a = 5^2 + 6 + 3x$$

$$5x - 3x = 5^2 - 5a + 6$$

و از مثال پیش نتیجه میشود

پس از جمع دو جمله مشابه طرف اول حاصل میشود

$$(a-2)x = a^2 - 5a + 6$$

$$x = \frac{a^2 - 5a + 6}{a-2} = a-2$$

مقرین

۱- تجدیهای زیر را حل کنید

$$mx + m = 5m$$

$$5ax - 10a^2 = 5ac$$

$$x - m = m + n$$

$$12a - 2(a-x) = 0$$

$$ay - (a-c) = 2a + c$$

$$2ax + 1ab = 4ab + 2ax - 3ab$$

$$mx + n^2 = 2m^2 - (mx - n^2)$$

$$ax + bx = a^2 - b^2 ; ax - 2a^2 - 1 = a^2 - x$$

۲- دارائی شخصی را معلوم کنید در صورتیکه مبلغ پول موجود او ۵ ریال و دوام او ۴ ریال باشد

در حالتی مخصوص نمی گنج a و یا $b = a$ و یا $b < a$ باشد نتیجه را تغییر کنید

۳- دو نفر اولی ۵ ریال و دومی ۴ ریال پول دارد اولی به دومی ۵ ریال به بکار است

و دومی به اولی ۴ ریال مبلغ دارائی هر یک چند میشود و تفاوت بین دارائی آنها چقدر است؟

۴- شخصی در یک روز ۵ ریال ب حساب خود در بانک گذاشت و در همان روز ۴ ریال

از بانک گرفت معلوم کنید درین روز چه مبلغ بر پس اندازش علاء و شده است - اگر $a = 20$

$a = 50$ = ۵۲۰ = چ باشد تغییر جواب چیست؟

۵- زمینی است زراعتی به درازای α متروبه پهنای β مترو و رآن خیابانی است به پهنای

۱۲۵ متر که درین زمین واقع شده حساب کنید مساحت قسمت زراعتی زمین را (در حالتی مخصوص)

$$\alpha = ۷۵ \text{ و } \beta = ۲۶ \text{ همچنین } \alpha = ۱۲۵, ۱۵ \text{ و } \beta = ۸۲, ۲۲$$

۶- باغی را به مبلغ α ریال خریدیم و به مبلغ β ریال فروختیم معلوم کنید صدی چند عمل شده است

$$\alpha = ۸۴۰۰ \text{ و } \beta = ۱۲۹۰۰ \text{ همچنین } \alpha = ۱۲۰۰۰ \text{ و } \beta = ۱۲۹۰۰$$

$$(\alpha = ۷۵۰۰ \text{ و } \beta = ۱۲۹۰۰)$$

۷- پارچه‌ای که پیش از شستن باز آن $\frac{3}{4}$ درازایش کوتاه می‌شود یک توپ ازین پارچه پیرا شستن

به درازای α متر شده است درازای آن پارچه پیش از شستن معلوم کنید (حالتی مخصوص: $\alpha = ۳۳, ۱۵$)

$$(\alpha = ۱۹, ۲ \text{ و } \beta = ۳۳, ۱۵)$$

۸- شخصی درازای مرزهای را با قدم خود اندازه گرفت خیال کرد که اگر درازای هر قدمش

۲۲ متر باشد با این حساب درازای مرز α متر می‌شود بعد درازای قدمش را بطور متوسط اندازه گرفت

معلوم شد که تساوی ۲۲ متر است معلوم کنید درازای حقیقی مرز را

۹- درازای پارچه‌ای با نری که β سانتی متر کوتاه است α متر می‌باشد درازای واقعی آن

$$(\alpha = ۱۵ \text{ و } \beta = ۲ \text{ حالت مخصوص})$$

۱۰- ملاتی است بشکل مستطیل به درازای α متروبه پهنای β متر میخواهیم سطح آن را از آبجری

بشکل مربع بهضلع ۲۰ سانتی متر فرش کنیم چند آجر لازم است؟ (حالتی مخصوص: $\alpha = ۱۲$ و $\beta = ۲۰$)

$$(\alpha = ۱۵ \text{ و } \beta = ۲۰ \text{ همچنین } \alpha = ۸ \text{ و } \beta = ۲۰)$$

۱۱- شخصی α ریا پول دارد اگر β ریا بشیر می‌داشت توانست $\frac{2}{3}$ بی خود را بر داند تعیین کند

بلغ بی در α (حالتی مخصوص $\alpha = ۱۵۰$ و $\beta = ۲۵$ همچنین $\alpha = ۶۵$ و $\beta = ۷۰$)

۱۲- فاصله بین دو شهر β کیلومتر است اتوبوسی با تندی α کیلومتر در ساعت از ساعت

حرکت نموده چند تا شهر دوم فاصله دارد؟ (در حالت مخصوص $\alpha = ۵۰$ و $\beta = ۱۲۵$ و $\beta = ۳$ و جواب مسئله تحقیق کنید)

۱۳- فاصله بین دو شهر β کیلومتر است مسافری قسمتی از آن را که β برابر قسمت دیگر است پیموده

معلوم کنید چند کیلومتر پیموده چند کیلومتر دیگر باقی مانده (حالتی مخصوص $\alpha = ۱۲۰$ و $\alpha = ۳$ همچنین $\alpha = ۱۵۰$ و $\alpha = ۴$)

۱۴- مسافری با سرعت β کیلومتر در ساعت از ساعت α می‌پایزد و

که $\frac{1}{3}$ آن را با تندی متوسط α کیلومتر در ساعت طی کرده است معلوم کنید تندی متوسط مسافر را در این راه (حالت مخصوص $\alpha = ۱۸۰$ و $\beta = ۶$ و $\alpha = ۳۰$)

۱۵- فاصله بین دو شهر β کیلومتر است اتوبوس β این فاصله را در α ساعت طی می‌کند

که در دقیقه بعد از اتوبوس β حرکت کرده β دقیقه زودتر از آن بشیر دوم می‌رسد تعیین کنید اولاً تندی β که اتوبوس β در حرکت بوده ثانیاً تندی متوسط اتوبوس β را ثانیاً تفاوت

تندی β با متوسط β و β را (حالت مخصوص $\alpha = ۸۷$ و $\beta = ۳$)

۱۶- شاگردی در دقیقه اولی α متر در هر دقیقه بعد β سانتی متر کمتر از دقیقه پیش می‌پیماید

معلوم گشت پس از ۴ دقیقه چند متر شنا کرده است و درین مدت بطور متوسط دقیقه چند متر در آب عبور کرده است

۱۷- در ازای استخوان d متر است اگر شناگری بتواند بطور متوسط دقیقه $(\alpha = ۰.۷)$ متر شنا کند

پس رود پس از چه مدتی در ازای استخوانی پدید آید (حالتی مخصوص: $d = ۶۳.۲۵$ و

$\alpha = ۳۷.۷۵$ همچنین $d = ۲۳.۶۵$ و $\alpha = ۳۵.۲۵$)

۱۸- باغیت شکل مستطیل که در ازای آن α متر پس از بنایش میبایستد و بنایش $\frac{1}{2}$ در ازای

است حساب گشت در ازاد پنا و مساحت باغ را (حالتی مخصوص: $\alpha = ۸۰$ و $\alpha = ۱۲۰$)

۱۹- قیمت α کیلوگرم گوشت α ریال است میدانیم که $\frac{1}{4}$ آن استخوان است معلوم کنید

قیمت یک کیلوگرم گوشت بی استخوان را (حالت مخصوص $\alpha = ۸$ و $\alpha = ۷۲$)

۲۰- درآمد سالیانه شخصی α ریال است و مخارجش α ریال معلوم کنید پس از چند سال مبلغ

α ریال پس انداز خواهد کرد؟ حالت مخصوص $(\alpha = ۱۲۰۰۰$ و $\alpha = ۷۰۰۰$)

($\alpha = ۱۵۰۰۰$)

۲۱- مبلغ α ریال پس ۵ نفر تقسیم شود و نفراتنا هر یک α ریال بیشتر سهم میسرند حساب

کنید سهم هر یک را (حالت مخصوص $\alpha = ۱۵۰$ و $\alpha = ۱۲.۵$)

۲۲- هر ۲۵ یارد تقریباً مساوی ۳۲ متر است معلوم کنید هر متر چند یارد و یارد

چند متر است؟

۲۳- هر ۵۵ سانی متر تقریباً مساوی ۲۱۵ اینچ است دستور تبدیل α سانی متر را

به اینچ پیدا کنید

۲۴- مجموع سه عدد متوالی را حساب کنید در صورتیکه عدد وسط مساوی a باشد و $\frac{1}{3}$ این مجموع

بدست آورید (حالتهای مخصوص: $a = 12$ و $a = -5$ و $a = -1$ و $a = -11$)

($a = 0$)

۲۵- فرد روزانه پدری a ریال و فرد روزانه پسرش b ریال کمتر است مخارج آنها

در روز $\frac{1}{3}$ درآمد روزانه آنها است معلوم کنید مبلغ پیرانه از آنها را پس از ۵ روز (حالت محتمل)

($a = 25$ و $b = 2$)

۲۶- در ازای ضلع ای مثلثی a ، b و c در ازای محیط آن m است هر یک

از عبارتهای $a - c + b$ و $c - b + a$ و $b - a + c$ را بر حسب m و k یکی از

اضلاع حساب کنید.

۲۷- شخصی مقداری پارچه خریده a ریال در فروش آن صدی پانزده خریده نفع برده نفع

در فروش او را حساب کنید (حالت مخصوص $a = 2450$)

فصل چهارم اتحادهای مهم

۱۱۲- چنانکه پیش گفتیم اتحاد تصادی بین دو عبارت جبری است بخشی که چون در هر عبارت مثل های لازم را انجام دیم دو طرف عین یکدیگر شوند. بنا بر این باید دو طرف یک اتحاد بازنه برشته اعدادی که بجای حرفها گذاشته میشود با یکدیگر تصادی شود.

چون در اعمال جبری دانستن بعضی از اتحادها لازم است بنا بر این باید دانش آموزان موارد این اتحادها را که اکنون میگوئیم بخاطر داشته باشند:

۱۱۳- اتحاد ۱- توان دوم یک دو جمله - چون دو جمله $a+b$ و همچنین $a-b$ را بتوان ۲ رسانیم حاصل میشود:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

بنابر این این دو اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

یعنی: توان دوم یک دو جمله مساویست با مجموع توانهای دوم

دو جمله آن بطاوة دو برابر حاصل ضربشان (هر جد را با نشانه اش باید د نظر گرفت).

نتیجه - از تفریق دو اتحاد بالا این اتحاد بدست میاید

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

یعنی: توان دوم مجموع دو جمله منهای توان دوم تفاضل میان دو جمله مساویست با چهار برابر حاصل ضرب آن دو جمله.

بنابر اتحاد ای بالا

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$(a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$$

$$(\sqrt{5}+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2 = 4\sqrt{5}$$

$$(2x+y)^2 - (2x-y)^2 = 8xy$$

تعبیر ۱ - میدانیم که دو عدد مستدین دارای یک توان دومند پس:

$$(a-b)^2 = (b-a)^2 \quad \text{و} \quad (a+b)^2 = (-a-b)^2$$

پرسش های شفاهی

حاصل این عبارت را بدست آورید

$$(x+1)^2, (10-y)^2, (7x-a)^2$$

$$(x-2a)^2, (2x-1)^2, (a+2x)^2$$

$$(2x-y)^2, (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2, (\sqrt{5}-2)^2$$

$$(2x-5y)^2, (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2, (2\sqrt{2}-1)^2$$

$$(2x+1)^2 - (2x-1)^2, (y+\sqrt{5})^2 - (y-\sqrt{5})^2$$

$$(2\sqrt{2}+1)^2 - (2\sqrt{2}-1)^2, (x\sqrt{2}+y\sqrt{2})^2 - (x\sqrt{2}-y\sqrt{2})^2$$

تبصره ۲- از ردی اتحادی (۱) میتوان بعضی از عدد ها را در ذیل میتوان دوم

رسانید

$$(21)^2 = (20+1)^2 = 20 \cdot 20 + 20 + 1 = 421$$

مانند

پرسش های شفاهی

عدد های زیر را بتوان دوم برسانید

۳۱

۷۱

۱۹

۳۱

۲۹

۱۰۱

۱۹۹

۷۸

تبصره ۳- هرگاه بخوابیم یک سه جلد را بتوان دوم برسانیم چون دو جلد از یک

فرض کنیم بتوانیم از ردی اتحاد (۱) آنرا بتوان دوم برسانیم.

چنانکه توان دوم سه جمله $a + b - c$ را میتوان چنین نوشت

$$(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2$$

$$= (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$

و چون $(a + b)$ را بتوان دوم برسانیم. حاصل $a + b - 2c$ را بدست آوریم
توان دوم سه جمله $a + b - c$ چنین میشود

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

و همچنین برای اینکه یک چهار جمله را بتوان دوم برسانیم کافی است که هر دو

(آنرا یکجمله فرض کنیم)

مثال - $(a + b + c - d)^2 = [(a + b) + (c - d)]^2$

$$(a + b)^2 + 2(a + b)(c - d) + (c - d)^2$$

پس از انجام عمل های لازم حاصل چنین میشود

$$(a + b + c - d)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad + 2bc + 2cd - 2cd$$

ازین مثالها و مثالهای دیگر این قاعده برای بدست آوردن توان دوم

چند جمله نتیجه میشود:

توان دوم یکچند جمله مساویست با مجموع توانهای دوم جمله های آن

بعلاوه دو برابر حاصل ضرب هر جمله در جمله های دیگر هر چند بار باشد

در نظر بگیرید.

تمرین

۱- چند جمله ای زیر را بر توان دوم رسانید :

$$(x - y + 1) \quad (a - 2b - c) \quad (2b + 2\sqrt{c})$$

$$(2x - 2y + 2z) \quad (-a - 2b - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5}) \quad (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$$

$$(x - y - a + 1) \quad (2x - 2y - 2a - 2b)$$

۲- درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید :

$$\sqrt{2 + \sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1 \quad \sqrt{2} + 2\sqrt{5} = \sqrt{42 + 6\sqrt{10}}$$

$$2\sqrt{7} - \sqrt{6} = \sqrt{24 - 4\sqrt{42}} \quad 5 - 2\sqrt{7} = -\sqrt{52 - 20\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2}}$$

۳- مستطیلی است به درازای a و پهنای b برای این مستطیل دو مربع بنفع b و b اضافه

کنیم و از سطح حاصل مربعی بنفع b - a برداریم ثابت کنید که مساحت باقیمانده سه برابر مساحت

مستطیل مفروض است

۱۱۴- اتحاد ۲- حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها چون $a + b$

$a + b$ را دارد و جمله $a - b$ (دو عبارت $a + b$ و $a - b$ را فرزوج یکدیگر

کویند، ضرب کنیم این اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

یعنی: حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها مساویست با توان

دوم جمله اول (کاهش باب) منهای توان دوم جمله دوم (کاست).

$$(a+2)(a-2) = a^2 - 4 \quad \text{مثال -}$$

$$(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$$

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) = a+b - (a-b) \\ = a+b - a+b = 2b$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})} \\ = \sqrt{1-12} = \sqrt{-11} = i\sqrt{11}$$

پرسش های شفاهی

نمات زیر را در زوج خود ضرب کنید

$x^2 + 2$	$1 + 2x$	$2a - b$
$2x - y$	$2xy - 2$	$a^2 - 5$
$a^2 + 2x^2$	$xy - y^2$	$ax - by$
$\sqrt{5} - \sqrt{2}$	$2\sqrt{3} - 5$	$2 - 2\sqrt{7}$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را معلوم کنید:

$$\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}} \quad \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}$$

$$(\sqrt{x^2+9} + 2)(2 - \sqrt{x^2+9})$$

$$\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$(5\sqrt{b} - b\sqrt{a})(b\sqrt{a} + a\sqrt{b})$$

$$\sqrt{a\sqrt{a} + \sqrt{a^2-x^2}} \cdot \sqrt{a\sqrt{a} - \sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}})^2$$

۱۱۵-۱ تا ۳- حاصل ضرب دو دو جمله‌ای که در یک جمله مشترکند.

چون دو جمله‌ای $x+a$ را در دو جمله‌ای $x+b$ ضرب کنیم چنین می‌شود:

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

بنابراین اتحاد زیر بدست می‌آید:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

بنی: حاصل ضرب دو دو جمله‌ای که در یک جمله مشترکند مساویست با توان دوم جمله مشترک بعلاوه حاصل ضرب مجموع دو جمله غیر مشترک و جمله مشترک.
حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک (باید هر جمله را با آن خود در نظر گرفت).

مثال

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x-5)(x-2) = x^2 + (-5-2)x + 10 = x^2 - 7x + 10$$

$$(x+3)(x-2) = x^2 + (3-2)x - 2 \times 3 = x^2 - x - 6$$

$$(2\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}-5) = 2 \times 3 - 2 \times 5\sqrt{3} + 25 = 29 - 10\sqrt{3}$$

پرششهای شطابی

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید

$$(a+1)(a+2)$$

$$(x+5)(x+7)$$

$$(y-2)(y-5)$$

$$(a-2)(a-8)$$

$$(x-8)(x+5)$$

$$(y-2)(y+2)$$

$$(y-2)(y+7)$$

$$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$$

$$(x^2+2x+2):(x+2)$$

$$(a^2-6a+8):(a-2)$$

$$(a^2-a-6):(a-2)$$

$$(x^2-x-2):(x-5)$$

۱۱- توان سوم دو جمله - توان سوم یک دو جمله مساویست یا نه؟

توانهای سوم هر جمله بجای و سه برابر توان دوم هر جمله دیگر

(هر جمله باقی نماند خود)

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

یعنی:

-۱۴۳-

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2ab + 2ab^2$$

مترین

۱- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$(a-b)^3 - (a-b)^2 - 2b^2$$

$$(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) - 2x(3x-5)$$

$$(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) + (a+c)(c+a)$$

۲- ثابت کنید که تساویهای زیرانگازند:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{4})(\sqrt{2} + \sqrt{4}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$$

$$(2 - 2\sqrt{5})(2 + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

$$(a + \sqrt{x})^2 + (a - \sqrt{x})^2 = 2a^2 - 6ax$$

فصل پنجم تجزیه عبارتها ب حاصل ضرب سازده

۱۱۲- تعریف - عبارت جبری که جز بر خود دایک ا بدون قید نشان عبارت دیگری

بخش پذیر نباشد آنرا اول گوئیم (انند اعداد اول در حساب)

چند جمله ای $2x+1$ و $5-2a$ و $x+1$ هر یک عبارتی اول

هستند

بنابر این هرگاه عبارتی غیر اول باشد یعنی عبارت دیگری بخش پذیر باشد تبدیل

ب حاصل ضرب دو سازده میشود (لمره ۱۱۰ مقصود)

ممكن است که هر یک از این دو سازده نیز تبدیل ب حاصل ضرب دو سازده دیگر شود چون این

عمل را ادامه دهیم بالاخره عبارت مفروض ب حاصل ضرب چندین سازده اول تجزیه میگردد

این عمل را تجزیه ب حاصل ضرب سازده ها گویند

چنانکه عبارت های 5 و x^2 و $2x$ و $3-4x$ و

$5x+5$ عبارت های غیر اولند که اولی بر دو سازده 5 و 5 و دومی بر x

و سومی بر سازده های 2 و 4 و c و x و چهارمی بر سازده های 4 و $1-x$

و پنجمی بر سازده های a و $x+1$ بخش پذیر و پس از تجزیه هر یک بسازده های اول

میتوان چنین نوشت :

$$ab = a \cdot b$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$12 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4x - 4 = 4x(x - 1)$$

$$ax + a = a(x + 1)$$

تجزیه سازه های اولی از قیمت های هم جبر و مقابله است که در ساده کردن برخی از عملیات جبری و حل مسئله بسیار میسر و در اینجا بعضی از قاعده های ساده آن را میگوئیم:

۱۱۸- الف- تجزیه چند جمله وقتی که جمله های آن دارای سازه مشترک باشند-

در چند جمله $ab + ac - ad$ جمله های آن دارای سازه مشترک a میباشند بنابراین چند جمله بر سازه a بخش پذیر است پس:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

یعنی چند جمله بالا ب حاصل ضرب دو سازه a و $(b + c - d)$ تجزیه شده است که چون این دو سازه در هم ضرب شوند چند جمله مفروض بدست میآید.

قاعده- نخست سازه مشترک جمله های چند جمله را تعیین میکنیم پس از آن چند جمله مفروض را بر این سازه مشترک تقسیم نموده بهر این تقسیم را بدست میآوریم و عبارت مفروض مساوی حاصل ضرب سازه

مشترک درین بهر خواهد بود.

مثال ۱- جمله ای چند جمله $a^2 - ۱۵ax + ۷a^2$ بر a بخش پذیرند یعنی a ساز

مشترک بین جمله های آن می باشد و چون آنرا بر a تقسیم کنیم بهر مساوی $a^2 - ۱۵ax + ۷a^2$ می شود

$$۷a^2 - ۱۵ax + a^2 = a^2(۷ax - ۱۵)$$

بنابراین

مثال ۲- عبارت $(۵-b) - \sqrt{۲}(۵-b) - \sqrt{۳}(۵-b)$ بر $۵-b$ بخش پذیر است

و بهر $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ می باشد پس:

$$\sqrt{۳}(۵-b) - \sqrt{۲}(۵-b) = (۵-b)(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$$

مثال ۳- عبارت $۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴$ را حساب کنید.

از روی تجزیه چنین خواهیم داشت

$$۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴ = ۳ \times ۵ (۱۷ - ۱۴) = ۳ \times ۵ \times ۳ = ۴۵$$

پرسش های شفاهی

عبارت های زیر را با حاصل ضرب ساز، تجزیه کنید:

$$(۲۱)^2 \quad (۲۳)^2 \quad (۱۵)^2$$

$$۱۱ax^2 \quad -۲۶a^2by^2 \quad ۲x^2 - ۲$$

$$ax + a \quad ۵x^2 + ۱۰x \quad ax + cx$$

$$ac - c^2 \quad ۳ax - ۶a \quad ax + acx$$

$$۵ax^2 - ۱۰x^2 \quad ۱۱ax - ۱۰bx \quad ۲ac - abc$$

$$\begin{array}{lll} 2ax - 2ab & 3ax + 6bx & -2ax^2 + a^2x \\ ab + ax + ay & acx - 3ac - c^2 & 2ay - 4y^2 + 6ay \end{array}$$

مترین

۱- عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازد تا تبدیل کند

$$\begin{array}{ll} 2ax - 15a^2 & ax - a^2x - a^2x \\ 3c^2 - 12c - 18c^2 & ay - abc - aby \\ a^2 - 10ax + a & 2c^2 - 15c + 5c^2 \\ a^4 - a^2 + a^2 + a & 1a^2 - 4c^2 + 12a^3 - 6a^5 \\ 1ax - 4bx + 12x\sqrt{5} & 12ax^2 - 2x\sqrt{2} + bx^2\sqrt{6} \end{array}$$

۲- پنججمله‌ای زیر را حل کنید:

$$\begin{array}{ll} ax = am - ac & my = am + bm - cm \\ 2ax = 6ab - 12a^2 & 4ax = 2ab - 10ac + 4a^2 \end{array}$$

۳- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\begin{array}{l} 3 \times 15 \times 12 \times 17 - 3 \times 15 \times 12^2 \\ \frac{22}{V} (21)^2 + \frac{22}{V} (14)^2 - \frac{22}{V} (21 \cdot 14) \\ 5722 \times (13)^2 + 5722 \times 65 + \frac{4 \times 5722 \times 13 \times 17}{2} \end{array}$$

۱۱۶- ب- تجزیه چند جمله‌بوسیله دسته بندی - دسته بندی یعنی دسته

کردن جمله های یک چند جمله ای که جمله ای هر دسته دارای سازه مشترکی باشند:

مانند چند جمله $ax + by + cx + ay$ که آنرا می توان بدو دسته $ax + cx$ و

$by + ay$ تبدیل نمود دسته اول دارای سازه مشترک x و دسته دوم دارای سازه

مشترک y می باشد بنابراین خواهیم داشت

$$ax + by + cx + ay = x(a + c) + y(a + b)$$

و حاصل دهم شود که طرف دوم این تساوی بر $a + b$ بخش پذیر است پس

$$ax + by + cx + ay = (a + b)(x + y)$$

بطور کلی هر عبارتی که مانند عبارت بالا یعنی بصورت $ax + by + cx + ay$ باشد

بسیار دسته بندی تجزیه پذیر می باشد.

مثال ۱- چند جمله $2cx^2 - 3acbx + 2cx - 3ac$ را با حاصل ضرب سازه

تجزیه کنید

چون چند جمله مفروض را بدو دسته $2cx^2 - 3acbx$ و $2cx - 3ac$

تبدیل کنیم و هر یک از این دو دسته را با حاصل ضرب سازه با تجزیه نمایم چنین خواهیم داشت

$$2cx^2 - 3acbx + 2cx - 3ac = cx^2(2x - 3a) + c(2x - 3a)$$

طرف دوم این تساوی بر $2x - 3a$ بخش پذیر است پس:

$$2cx^2 - 3acbx + 2cx - 3ac = (2x - 3a)(cx + c)$$

مثال ۲- مطلوبست تبدیل عبارت $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 6 + \sqrt{6}$ با حاصل ضرب

منازه:

در دو جمله اول و سوم عدد ۳ در دو جمله دیگر $\sqrt{3}$ سازه مشترک است بنابراین میتوان چنین نوشت:

$$6 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 3(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + 2) \\ = (2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})$$

مثال ۳- میخواهیم عبارت

$$1 + xy + a(x+y) - (x+y) - a(1+xy)$$

را حاصل ضرب سازه ها تجزیه کنیم

$1 + xy$ را یک جمله فرض می کنیم بنابراین با جمله آخر دارای سازه مشترک $1 + xy$ میباشد و دو جمله دیگر عبارت مفروض دارای سازه مشترک $x + y$ است پس عبارت بالاسادی

$$(1 + xy)(1 - a) + (x + y)(a - 1)$$

ویا سادی $(1 - a)(x + y) - (1 + xy)(1 - a)$ میشود.

سازه مشترک این عبارت $1 - a$ است بنابراین عبارت مفروض بدین صورت درمیآید

$$(1 - a)(1 + xy - x - y)$$

پراثر دوم نمیشد تجزیه پذیر است زیرا اگر آن را بدو دسته $xy - x$ و

$-y$ تبدیل کنیم و دسته اول x و دسته دوم -1 را سازه مشترک قرار دهیم داخل پرانتز

سادى

$$x(y-1) - (y-1) \quad \text{يا} \quad (x-1)(y-1) \quad \text{يا} \quad (y-1)(x-1)$$

پس عبارت بالا بصورت حاصل ضرب

$$(1-a)(y-1)(x-1) \quad \text{يا} \quad (1-a)(x-1)(y-1)$$

مثال ۴- مطابق عمل بچندى

$$abx + x = ab + c - 2ab - 2$$

دو طرف را بجا حاصل ضرب ساز و با تجزیه می کنیم پس خواهیم داشت:

$$x(ab+1) = c(ab+1) - 2(ab+1)$$

$$x(ab+1) = (ab+1)(c-2)$$

اگر $ab+1 \neq 0$ باشد ریشه بچندى چنین است:

$$x = c - 2$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بجا حاصل ضرب ساز و با تجزیه کنید:

$$ax + 2x + ay + 2y \quad x^2 + z^2 + x + 1$$

$$a(c-y) - b(y-c) \quad ay(a-b) + ax(b-c)$$

$$2ax + bx - ay + 2by \quad ax + 2a - bx - 2b$$

$$x^2 - ay + axy - x \quad a^2 - 2ax - a^2x + 2x^2$$

$$a^2c - acx + acx^2 - a^2cx$$

$$12ax^4 - 6ax^3 - 4x^5 + 2x^3$$

$$10 + \sqrt{14} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$$

$$4\sqrt{11} - 6\sqrt{15} - 2\sqrt{30} + 15$$

۲- ac ، ab ، a و b مستطین که پهنای آن (a) و (b) د (c)

میباشد راست گوشه ای از مربع مستطیلی پیدا کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتی آنها باشد (نیز از روی شکل برابر بودن آنها ثابت کنید)

۳- در مستطینش راست گوشه ای پیدا کنید که مساحتش برابر تفاضل مساحتی آنها باشد (نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۴- a ، b ، c و d غایب چهار درازا میباشند ثابت کنید که مجموع چهار مستطیل ac ، ab ، bc و cd را میتوان بیک راست گوشه تبدیل کرد که از حیث مساحت با مجموع آنها برابر باشد (از روی شکل نتیجه همین مطلب را به ثبوت رسانید)

۵- در عبارت $ac - bc + ad - cd$ ، a ، b ، c و d غایب چهار درازا میباشد - اول معنای هندسی عبارت بالا را بگویند دوم آن عبارت را بازه های اول تجزیه نمود و تعبیر هندسی تساوی حاصل را بیان کنید.

۱۲۰- ۷- تجزیه سه جمله هاست که بصورت $a^2 \pm 2ab + b^2$

میباشند - از اتحاد (۱) معلوم میشود:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

یعنی: هر سه جمله ای که فرکتب از مجموع توانهای دوم دوسازه بعلاوه
(یا منهای) دو برابر حاصل ضربشان باشد بتوان دوم مجموع (یا تفاضل)
آن دو تبدیل میگردد.

مثال - درجه $26b^2 + 60ab + 25a^4$ درجه اول و آخر است

توان دوم دوسازه $5a^2$ و $6b^2$ باشد درجه $60ab$ برابر است

$2 \times 5a^2 \times 6b^2$ بنا بر این این سه جمله را میتوان چنین نوشت

$$25a^4 + 60ab + 26b^2 = (5a^2 + 6b^2)^2$$

همچنین سه جمله $4x^2 + 9a^2 - 12ax^2$ تشکیل شده است از مجموع توانهای دوم $2x^2$

و $3a^3$ و جمله $12ax^2$ که مساویست با $2 \times 2x^2 \times 3a^3$ پس

$$4x^2 + 9a^2 - 12ax^2 = (2x^2 - 3a^3)^2 = (3a^3 - 2x^2)^2$$

پرش های شفاهی

۱- بر هر یک از عبارتهای زیر جمله ای بیفزاید تا عبارت حاصل بصورت توان (دوم) بنشیند

در جمله در آید:

$$a^2 + 1$$

$$1 + 16c^2$$

$$12x + 26$$

$$y^2 - 18y$$

$$-16x + 64$$

$$16a^2 - 16ax$$

$$-22ac + 9c^2$$

$$16x^2 + 4y^2$$

$$16x^2 - 22ax$$

$$۲۵ \dot{a}^2 + ۱۰۰$$

$$۹ \dot{x}^2 - ۶x$$

$$۱۲ \dot{x}^2 - ۱۲cx$$

۲- سجد های زیر را به توان دوم یک "جمله تجزیه کنید"

$$\dot{x}^2 - ۴x + ۴$$

$$۹ \dot{x}^2 - ۱۲x + ۴$$

$$۴ \dot{y}^2 - ۴y + ۱$$

$$\dot{a}^2 - ۱۲a + ۴۱$$

$$\dot{c}^2 + ۲ - ۴c$$

$$۱۱ - ۱۸ \dot{t}^2 + \dot{t}^2$$

$$\dot{c}^4 + ۱۲ \dot{c}^2 + ۱$$

$$\dot{x}^2 + x + \frac{1}{۴}$$

$$۴ \dot{x}^2 + x + \frac{1}{۱۶}$$

$$۹ \dot{a}^2 - ۲۰a + \frac{1}{۴}$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را ایصل ضرب ساز و تجزیه کنید

$$۱۶ \dot{t}^2 - ۸at + a^2$$

$$۲۵ \dot{x}^2 - ۲۰xy + py^2$$

$$۹ \dot{a}^2 - ۲۰at + ۲۵ \dot{t}^2$$

$$۲ \dot{a}^2 - ۲۸at + ۴۹ \dot{t}^2$$

$$\dot{x}^2 + \frac{1}{۴}x + \frac{1}{۴}$$

$$۱۴۴ \dot{t}^2 - ۱۲at + ۲۵ \dot{a}^2$$

$$۱۶۹ \dot{x}^2 + ۷۸ax + ۹a^2$$

$$\dot{x}^2 + ۴y^2 + ۴ \dot{x} \dot{y}$$

$$۴ \dot{t}^2 - ۴at^2 + ۱$$

$$۱۲۱ \dot{x}^2 - ۱۱۰cx + ۲۵ \dot{c}^2$$

$$\frac{۲۵}{۱۶} \dot{x}^2 + \frac{۵}{۴}x + ۱$$

$$\dot{y}^2 + y + \frac{1}{۴}$$

$$۱۲۱ \dot{x}^2 - ۲۲۰txx + ۱۰۰ \dot{t}^2$$

$$۱۶۹ \dot{a}^2 - ۱۵۶ax + ۲۶ \dot{x}^2$$

۲- بچند های زیر را اقل کنید:

$$ax - cx = a^2 - 2ac + c^2$$

$$ax - rtx = a^2 - 2at + t^2$$

$$bx - rx = b^2 - 16b + 16$$

$$ay - c^2 = a^2 - 2ac - cy$$

مقبوضه - به تجزیه یک عبارت جبری بهتر است که نخست سازدها را مشترک تمام جمعه بارا اگر کوچک باشد تعیین نموده پس از آن تجزیه پرداخت

مثال ۱- عبارت $a^2 - 2ax + x^2$ را بحاصل ضرب سازدها تجزیه کنید.

چند جمله $a^2 - 2ax + x^2$ بر a بخش پذیر است بنابراین

$$a^2 - 2ax + x^2 = a^2(x^2 - 2x + 1)$$

سه جمله درون پرانتز توان دوم $x - 1$ است پس

$$a^2 - 2ax + x^2 = a^2(x - 1)^2$$

مثال ۲- میخواهیم عبارت $2ct - 2cx + 2at - 2ax$

بحاصل ضرب سازدها تجزیه کنیم.

عبارت بالا را میتوان برتربین چنین نوشت

$$2ct - 2cx + 2at - 2ax = 2(ct - cx + at - ax)$$

$$= 2[c(t - x) + a(t - x)]$$

$$= 2(t - x)(c + a)$$

تمرین

عبارت های زیر را حاصل ضرب سازه تجزیه کنید:

$$t^5 - 4t^2 + 4t^3$$

$$2c^3 - 20c^2 + 50c$$

$$16a^3 - 20at + 25at^2$$

$$at^2 - 20at + 25a$$

$$22at^4 - 21at^3 + 11at^2$$

$$2at + 2ay + 22t + 22y$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x$$

$$2a^5 - 2a^4 + 2a^3 - 2a^2$$

$$20at - 15a + 12c - 24ct$$

$$4atz + 4atz - 10aty - 10aty$$

$$\pi h(R-z)^2 - \pi h(R+z)^2 + \pi hR^2$$

۱۲- د- تجزیه عبارت که بصورت $a^2 - b^2$ باشد از اتحاد شماره ۱۰

چنین برآید:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

یعنی: تفاضل توانهای دوم دو عبارت بحاصل ضرب مجموع

آن دو در تفاضلشان تجزیه میگردد.

مثال ۱- عبارت $16x^4 - 81a^2$ را بحاصل ضرب سازه تجزیه

کنید.

چون این عبارت بصورت $x^2 - ۵$ است خواهیم داشت:

$$۱۶x^4 - ۸۱a^4 = (۴x^2 + ۹a)(۴x^2 - ۹a)$$

پراشرد و مینیمم تجزیه میشود بنا بر این:

$$۱۶x^4 - ۸۱a^4 = (۴x^2 + ۹a)(۲x^2 + ۳a)(۲x^2 - ۳a)$$

مثال ۲- مطلوبت محاسبه $۵۹^2 - ۵۷^2$

از روی تجزیه حاصل آن آسانی بدست میآید از اینقرار:

$$۵۹^2 - ۵۷^2 = (۵۹ + ۵۷)(۵۹ - ۵۷) = ۱۱۶ \times ۲ = ۲۳۲$$

پرسش های شفاهی

عبارت های زیر را حاصل ضرب ساز و تجزیه کنید:

$$a^2 - ۹ \quad ۴x^2 - ۱ \quad ۴x^2 - ۹$$

$$۲۵y^2 - ۳۶z^2 \quad ۱۰۰x^2 - ۸۱y^2 \quad ۸۱x^2 - ۱۲۱K^2$$

$$\frac{1}{۲۵} - ۷۰۴x \quad x^2 - \frac{۲۵}{۶۴} \quad \frac{۴}{۹}x^2 - ۱۲۱$$

$$۱۲^2 - ۱۵^2 \quad ۲۵^2 - ۵^2 \quad ۳۶^2 - ۳۴^2$$

مثال ۱- مطلوبت بدیل عبارت $(a+b)^2 - (a-b)^2$

بجاء حاصل ضرب ساز و ده.

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)][(a+b) - (a-b)]$$

$$= (a+b+a-b)(a+b-a-b) \\ = 2a \cdot 2b = 4ab$$

دید می شود که این تجزیه همان نتیجه اتحاد شماره ۱۱۲ است

مثال ۲- عبارت $(1-2y)^2 - (1-2x)^2$ را حاصل ضرب سازه با تجزیه کنید
می توان چنین نوشت

$$(2x-1)^2 - (1-2y)^2 = [(2x-1) + (1-2y)][(2x-1) - (1-2y)] \\ = (2x-2y)(2x+2y-2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حاصل ضرب سازه با تجزیه کنید:

$$25a^2 - 16b^4 \qquad 16a^2 - 9(a+b)^2$$

$$16x^2 - 9(a-2x)^2 \qquad 64x^2 - (11x+2y)^2$$

$$(a-2x)^2 - (2x+5)^2 \qquad (25-5)^2 - (25+5)^2$$

$$(5a-2b)^2 - (25-2b)^2 \qquad 12(x-2y)^2 - 41(2x-y)^2$$

۲- عبارت های زیر را حساب کنید:

$$7^2 - 4^2 \qquad 56^2 - 51^2 \qquad 127^2 - 27^2$$

$$11^2 - 6^2 \qquad 154^2 - 146^2 \qquad 215^2 - 185^2$$

۳- بازه $\pi = \frac{11}{4}$ و $P = 11$ و $x = 7$ عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\frac{2}{3}\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \quad , \quad \pi R^2 - \pi r^2$$

مثال ۱- عبارت $a^2 - 2ab + b^2 - x^2$ را حاصل ضرب سازد

سه جمله اول توان دوم $b - a$ است بنا بر این میتوان چنین نوشت

$$a^2 - 2ab + b^2 - x^2 = (a - b)^2 - x^2 \\ = (a - b + x)(a - b - x)$$

مثال ۲- عبارت $t^2 - t^2 - 2t + 4$ را حاصل ضرب

کنید:

توان ترتیب چنین نوشت

$$t^2 - t^2 - 2t + 4 = t^2(t - 1) - 2(t - 1) \\ = (t - 1)(t^2 - 2) \\ = (t - 1)(t + 2)(t - 2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حاصل ضرب سازد تا تجزیه کنید:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 - m^2 & \quad xy^2 - x^2 + x^2 - 2xy \\ 4xy - t^2 + y^2 + 9x^2 & \quad 1 - 4at - t^2 + 4a^2t^2 \\ 4at - 2a^2 - 9t^2 + m^2 & \quad m^2 - a^2 - 2at - t^2 \\ x^2 - 4xt + 4t^2 - 9a^2 + 6a - 1 & \end{aligned}$$

$$1 + 2bc + 2a - c^2 - b^2 + a^2$$

$$a^3 - a + a^2 - x \quad 2ax + 2ax - 1ax - 12x$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 \quad x^2 + 2x^5 + x^7$$

$$2x^4 - 20x^2 + 200 - 2m^2$$

$$5a^4 + 20a^3 + 55a^2 - 20a^5$$

۲- بچندانی زیر را حل کنید (نبا بر اینک x مجهول باشد):

$$ax + bx = a^2 - b^2 \quad x^5 - x^3 = 2x - x$$

$$x(x-2)(x^2+1) = x^4 - 11 \quad ax = a^2 - 2a + 1 + ax$$

$$x^2 + 4x + 9 \quad ۱۲۲- ۵- تجزیه سه جمله درجه دوم$$

از اتحاد (۲) چنین بر می آید که:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

یعنی: سه جمله $x^2 + 4x + 9$ وستی تجزیه پذیر بسازه های درجه اول است که هر حاصل جمع دو مقدار و ۹ حاصل ضرب همان باشد.

مثال ۱- سه جمله $x^2 + 3x + 2$ را تجزیه کنید.

عدد ۲ را باید تبدیل بحاصل ضرب دو مقدار نمود بطوریکه مجموعشان ۳ باشد چون حاصل جمع و حاصل ضرب هر دو مثبت هستند بنابراین دو عدد مطلوب مثبت بوده

و مساوی ۱ و ۲ میباشد پس :

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)(x+2)$$

مثال ۲- سه جمله $24 - 11a + a^2$ را تجزیه کنید .

حاصل ضرب دو عدد مطلوب که ۲۴ باشد مثبت است و مجموعشان یعنی ۱۱- منفی است
بنابراین این دو عدد منفی میباشند برای تعیین آنها عدد ۲۴ را باید بدو ساز تجزیه
نمود بطوریکه مجموعشان ۱۱ شود و چون ۲۴ تشکیل شده است از حاصل ضرب

۱	۲۴ × ۱	که در اینجا مجموعشان	۲۵ است
۲	۱۲ × ۲	"	۱۴ است
۳	۸ × ۳	"	۱۱ است
۴	۶ × ۴	"	۱۰ است

بنابراین می بینیم که دو عدد مطلوب ۳- و ۸- میباشد

$$a^2 - 11a + 24 = (a-8)(a-3) \quad \text{پس}$$

مثال ۳- مطلوبست تجزیه سه جمله $c^2 - c - 42$ بدو سازه درج اول

چون حاصل ضرب دو عدد مطلوب (یعنی ۴۲-) منفی است پس نشانه آنها مختلف باشد
و چون حاصل جمعشان (یعنی ۱-) منفی است پس آنکه قدر مطلقش بزرگتر است منفی باشد
بنابراین باید ۴۲ را بدو سازه تجزیه کنیم بقسمی که تفاضشان ۱ باشد و بعد سازه بزرگتر
منفی کنیم :

۴۲ تشکیل شده است از:

۴۱ ست	که در اینجا تفاضلشان	۴۲×۱	
۱۹ ست	+	۲۱×۲	یا
۱۱ ست	+	۱۴×۳	یا
۱ ست	+	۷×۶	یا

پس دو عدد مطلوب ۷- و ۶- میباشند و از آنجا خواهیم داشت:

$$c^2 - c - ۴۲ = (c - ۷)(c + ۶)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حاصل ضرب ساده تجزیه کنید:

$$x^2 + ۴x + ۳$$

$$a^2 - ۹a + ۱۴$$

$$t^2 + ۳t - ۱۰$$

$$x^2 - ۸x + ۷$$

$$t^2 - t - ۶$$

$$y^2 - ۳y - ۴۵$$

$$-x^2 - x + ۱۲$$

$$-۲y^2 - ۳y + ۶۳$$

$$ab^2 + ۱۰abx^2 - ۲۴x^4$$

$$۲۲a^2 - ۱۵abx - ۱۵bx^2$$

$$(a+x)^2 + ۳(a+x) + ۲$$

داین عبارت مجموع $(a+x)$ را در نظر بگیرید

۲- تمرین باقی بمانده - عبارتهای زیر را حاصل ضرب ساده تجزیه کنید:

$$x^2 - 2x$$

$$5x^2 + x^2 - x^2$$

$$2y^2 - 1y - 2$$

$$ab^2 - 7ab - 11a$$

$$11a - 11a^2 + a^2$$

$$4a^2 - 12a^2 - 200a$$

$$+ 5x^2 + 2x^2 + 11ax + 1cx$$

$$2a^2 - 2ay^2 - 1ayx - 2ax^2$$

۲- پنج‌بای زیر را بنا بر آنکه x ، y و z مجهول باشند حل کنید.

$$(a-2)x = a^2 - 5a + 6$$

$$2x + 5x = a^2 - 16$$

$$K_y + 4z = K - K - 6y$$

$$ay + a = a^2 - 5y - 2$$

$$2x + 2ac = a^2 + 2cx + 2c^2$$

۳- با دو نظر گرفتن دهبائی مانند تساوی

$$(\sqrt{5} \pm \sqrt{3})^2 = 1 \pm 2\sqrt{15}$$

که در آن $1 = 5 + 3$ ، $15 = 5 \times 3$ عبارت‌های زیر را با هم حل غرب سازد و استخراج کنید

$$5 - 2\sqrt{6}$$

$$5 + 2\sqrt{6}$$

$$7 + 2\sqrt{10}$$

$$6 - 2\sqrt{8}$$

$$1 - 2\sqrt{7}$$

$$4 + 2\sqrt{2}$$

$$11 - 12\sqrt{2}$$

$$16 - 2\sqrt{55}$$

$$6 - 2\sqrt{2}$$

۱۲۳- حل بعضی از پنجمی ها از روی تجربه.

مثال ۱- مطلوبست حل بجهدی . $(x-3)(x+2)=0$ برای حل این بجهدی باید
در نظر داشت که

شرط لازم و کافی برای این که حاصل ضرب چند سازه مساوی
صفر باشد آنست که دست کم یکی از سازه ها صفر باشد (نمونه ۲۲)
از اینجا چنین بر می آید که یا $x-3=0$ باشد یا $x+2=0$ یعنی $x=3$
یا $x=-2$ دو عدد ۳ و -۲ ریشه های بجهدی منفه دهنده.

مثال ۲- مطلوبست حل بجهدی

$$(x-1)(2x-3)=(x-1)(2x+5)$$

اگر دو طرف بجهدی را بر $x-1$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$2x-3=2x+5$$

و یا $-3=5$ یعنی ریشه ای برای بجهدی مفروض بدست نمی آید در صورتیکه می بینیم اگر
به راستی این یکت بگیریم دو طرف بجهدی با هم یکی میشوند یعنی ۱ ریشه بجهدی است
برای بدست آوردن این ریشه طرف دوم را بطرف اول برده و عبارت حاصل را بجهدی
می کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(x-1)[2x-3-(2x+5)]=0$$

و یا $(x-1)(-8)=0$ با باصل بالا چون سازه ۸- مخالف صفر است پس

باید $x-1=0$ باشد و از آنجا ریشه بجهدی بالا $x=1$ میباشد.

۱۲۴- تبصره هفتم- نباید دو طرف همچندی را بر عبارتی شامل مجهول تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشه همچندی از بین برود و بگوید که آن عبارت شامل هیچ ریشه نباشد یعنی باز از هیچ مقدار مجهول صفر نشود

بما بر این چون در دو طرف همچندی سازه مشترکی که شامل مجهول باشد به پسیم نباید آنرا بدون وقت از بین برد بلکه باید همه جمله را با یک طرف برده آنرا تجزیه نمود و ریشه های همچندی است آورد.

مثال- مطلوبست حل همچندی $x^2 + x^2 = 4x + 4$

پس از تجزیه دو طرف بحاصل ضرب سازه با چنین میشود

$$x^2(x+1) = 4(x+1)$$

همی پسیم دو طرف دارای سازه مشترک $x+1$ است اگر همه جمله را با یک طرف ببریم خواهیم داشت :

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2-4) = 0$$

و یا پس از تجزیه

$$(x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

و یا

پس ریشه های یچندی بالا عبارتند از ریشه های یچندی های

$$x-2=0, \quad x+2=0, \quad x+1=0$$

یعنی $x = -1$ و $x = -2$ و $x = 2$
 در صورتیکه اگر دو طرف را بر سازه مشترک $x + 1$ تقسیم می‌کردیم ریشه $x = -1$
 از بین میرفت.

تمرین

بخشهای زیر را حل کنید:

$$x^2 = 2$$

$$x^2 = 21$$

$$x^2 = 5x$$

$$5x^2 - 25x = 0$$

$$(x-2)^2 + x - 9 = 0$$

$$(x-1)^2 + (2x+5)(x-1) = 0$$

$$(2x-2)^2 - (2x-2)(x-2) = 0$$

$$x^2 - 2 = 2x^2 + 2$$

$$x^2 - 2x = 5x - 5$$

$$(x-2)^2 - (2x-1)(x-2) = 0$$

$$(2x+2)(x-2) - (x-2)^2 = 0$$

$$x^2 - 2 = 2x^2 + 2$$

$$y^2 - 1y = 25 - 5y$$

$$x^2 - 2x = 2x^2 - 20x$$

فصل ششم

برخه

۱۲۵- تعریف - چنانکه میدانیم هر مقدار جبری α بر مقدار جبری β را به صورت
برخه $\frac{\beta}{\alpha}$ نویسند چنین برخه که برخه شمار و برخه نامش و عبارت جبری باشد برخه جبری
نامیده میشود

مثال: $\frac{-2}{3}$ و $\frac{2-x}{\alpha-1}$ و $\frac{-\alpha+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-x}$
نشانه برخه اگر جلوی خط برخه که ارد میشود (موافق قاعده تقسیم مثبت است
اگر برخه نام و برخه شمارش دارای یک نشانه باشند و الا منفی است

$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$ $\frac{-5}{-7} = \frac{+5}{+7} = +\frac{5}{7}$
بعکس میتوان نشانه جلوی برخه را تغییر داد بشرط اینکه نشانه برخه نام یا خبر
شمار تغییر نماید

$$-\frac{x-2}{x+1} = \frac{-(x-2)}{x+1} = \frac{2-x}{x+1} \quad \text{مانند}$$

$$-\frac{x^2+a}{ax-1} = \frac{x^2+a}{-(ax-1)} = \frac{x^2+a}{1-ax}$$

$$\frac{2x-a}{2a-x} = -\frac{a-2x}{2a-x} = -\frac{2x-a}{x-2a}$$

پرشش های ساده

نشانه جلوی هر برخه را تغییر دهم بطوریکه مقدار آن برخه تغییر نکند

$$\begin{array}{ccc} \frac{-x}{x} & \frac{-x}{y} & \frac{-2x}{a-b} \\ \frac{a}{-x} & \frac{-2}{a-x} & \frac{2a}{1-2x} \\ \frac{-a-b}{2x-2} & \frac{2x-1}{2-5x} & \frac{a-x}{a^2-2x} \\ \frac{-2b-a}{2x-y+1} & \frac{a-2}{x^2(a-1)} & \frac{x^2(1-ax)}{(a-b)^2} \end{array}$$

۱۶۶- بنا بر تعریف تقسیم اگر بر ۶ بر ۶ مساوی ۹ باشد یعنی $\frac{9}{6}$ خواهیم داشت

$$a = 6g$$

۱۶۷- در عمل نامی را به بر ۶ نامیده و از این اصل استفاده می کنیم:

برگاه بر ۶ شمار و بر ۶ نام را در عبارتی مخالف صفر ضرب و بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کنیم و مقدار بر ۶ تغییر می یابد و از خاصیت نامی تقسیم شماره ۶۰

مثلاً می توان نشان داد بر ۶ نام و بر ۶ شمار بر ۶ تغییر داده و نامی تغییر می یابد و مقدار بر ۶ پیدا شود زیرا مثل اینست که بر ۶ نام و بر ۶ شمار در عدد ۱۰ ضرب یا بر ۶ تقسیم شده باشد

$$\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \frac{2}{-4} = \frac{-2}{4} \quad \text{مثلاً}$$

$$\frac{a-x}{y-x} = \frac{x-a}{x-b}$$

الف- ساده کردن بر ۶

۱۶۸- تبدیل بر ۶ به ساده ترین صورت - ساده ترین صورت یک بر ۶

برخه ایست که برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اول باشند یعنی این عبارت دارای سازده مشترک نباشند

مانند $\frac{x^2-1}{x^2-1}$ و $\frac{x-2}{x+2}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{-3}{4}$
 و هرگاه برخه شمار و برخه نام نسبت بهم اول نباشند یعنی بر عبارتی بخش پذیر باشند بتوان
 بسید تقسیم کردن آنها بر آن عبارت برخه را ساده نمود.

مثلاً در برخه $\frac{۳۵۵}{۳۵۵}$ برخه شمار و برخه نامش دارای سازده مشترک ۳۵۵
 میباشد که چون آنها را بر این سازده مشترک تقسیم کنیم حاصل میشود $\frac{۱}{۱}$ این برخه
 ساده ترین صورت برخه بالا است و همچنین در برخه $\frac{۵-۵}{۵+۵}$ برخه شمار و برخه نامش نسبت
 اول نیستند زیرا از تجزیه هر یک معلوم میشود که دارای سازده مشترک ۵+۵ میباشد ازینرا

$$\frac{۵^۲-۵^۲}{۵^۲+۵^۲} = \frac{(۵+۵)(۵-۵)}{۵(۵+۵)} = \frac{۵-۵}{۵}$$

از اینجا قاعده زیر را برای تبدیل برخه بساده ترین صورت خود خواهیم داشت
 ۱۲۹- قاعده - برای تبدیل یک برخه بساده ترین صورت خود
 و برخه نام را بجای ضرب سازده نامی اول تجزیه نموده سازده نامی مشترک را
 حذف میکنیم (یعنی آنها را بر این سازده مشترک تقسیم نماییم)

چنانکه برای تبدیل برخه $\frac{۵-(۵-۵)}{۵+۵-۵}$ بساده ترین صورت خود از روی قاعده
 بالا عمل میکنیم ازینرا:

$$\frac{۵-(۵-۵)}{۵+۵-۵} = \frac{(۵+۵-۵)(۵-۵+۵)}{۵(۵+۵-۵)} = \frac{۵-۵+۵}{۵}$$

۱۳۰- یادآوری- اذلا چنانکه گفتیم اگر برخه شمار و برخه نام را در عبارت ضرب کنیم تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمی کند ولی اگر برخه شمار و برخه نام یک عبارت مخالف صفر بگیریم و یا از آن یک عبارت مخالف صفر کم کنیم مقدار برخه تغییر میکند.

چنانکه هرگاه از برخه شمار و برخه نام $\frac{5}{4}$ یک یک کم کنیم حاصل مساوی $\frac{4}{3}$ و یا $\frac{5}{4}$ میشود که مخالف $\frac{5}{4}$ است و نیز اگر بر آن یک یک بفرایم حاصل مساوی $\frac{6}{5}$ و یا $\frac{7}{4}$ میشود که آن نیز مخالف $\frac{5}{4}$ است

همچنین برخه $\frac{x-1}{x+1}$ ساده ترین صورت را داراست زیرا برخه شمار و برخه نام مثل نسبت هم اولند ولی اگر از برخه شمار و برخه نام x را کم کنیم مقدار برخه مساوی $\frac{1}{1-x}$ یا $\frac{1}{1-x}$ میشود که با برخه $\frac{x-1}{x+1}$ مساوی نیست زیرا این برخه باز مقدار نامی x مقدار نامی مخالف ۱- پیدا میکند.

نهایتاً باید دانست که اگر برخه شمار و برخه نام را در دو عبارت مختلف ضرب کنیم مقدار برخه تغییر میکند بخصوص اگر آنها را بتوان دو هم رسانیم مقدار برخه تغییر میکند (مگر وقتی که برخه مساوی ۱ باشد)

پیشش های ساده

۱- برخه های زیر را ساده کنید.

$$\frac{10x^2}{15x^3}$$

$$\frac{-60m^2}{-90m^3}$$

$$\frac{26a^2}{11ax}$$

$$\frac{-144x^2}{120x}$$

$$\frac{14ax^2}{60ax}$$

$$\frac{25x^2}{-36ax}$$

$$\frac{-14m^2n^2}{5 \cdot m^2n^2}$$

$$\frac{62abc^2}{18abc^2}$$

$$\frac{d\sqrt{6}}{x\sqrt{2}}$$

قرین

هر یک از برخه های زیر را بساد و نرین صورت خود تبدیل کنید :

$$\frac{a^2 - ab}{a^2 - ab}$$

$$\frac{ax - a}{b - b^2}$$

$$\frac{5x - 5}{y - yx}$$

$$\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$$

$$\frac{6a^2 - 6ab}{2(b-a)^2}$$

$$\frac{x - x}{1 - x}$$

$$\frac{mx - m - x + 1}{(m-1)^2}$$

$$\frac{ax + bx + cx}{ay + by + cy}$$

$$\frac{ac + bc - ad - bd}{ac - bc - ad + bd}$$

$$\frac{1ac - 2ad - 2bc + 3bd}{1ac - 2ad + 3bc - 2bd}$$

$$\frac{2x^2 - 3x^2 - 27}{2x^2 - 242}$$

$$\frac{(x-2)^2 - a^2}{2x - 2 + 2a}$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 12x + 18}$$

$$\frac{6ab^2 - 2d^2b - 2a^2b^2}{ab^2 - db^2}$$

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax^2 + 2a^2}$$

ب. جمع جبری برخه ها

۱۳۱. جمع جبری برخه ها اینکه دارای یک برخه نامند - بنویسیم و برخه

$\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ که دارای یک برخه نامند با هم جمع کنیم اگر مقدار این دو برخه تریب

$\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ باشد خواهیم داشت

$$a = \frac{a}{b} \quad \text{و} \quad a' = \frac{a'}{b'}$$

و بنویسیم حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ را بدست بیاوریم برای این کار چون دوتاوی بالا با هم جمع کنیم این تادوی بدست میآید

$$a + a' = bq + b'q'$$

$$a + a' = b(q + q')$$

و یا

حال برای تعیین $q + q'$ کافیت دو طرف این تساوی را بر b تقسیم کنیم

$$q + q' = \frac{a + a'}{b}$$

یعنی $q + q'$ یا حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b}$ برخه ایست مساوی $\frac{a + a'}{b}$

که برخه شمارش مجموع برخه شمار با و برخه نامش مساوی برخه نام دو برخه مفروض باشد

بنابر این قاعده را زیر را خواهیم داشت:

قاعده - مجموع جبری چند برخه که دارای یکت برخه نامند برخه ایست

که برخه نامش همان برخه نام و برخه شمارش مجموع جبری برخه شمارهای آنها

باشد

$$\frac{a}{x} - \frac{2a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a - 2a + b}{x} = \frac{-a + b}{x}$$

مانند

$$\frac{a-b}{12} - \frac{b-a}{12} - \frac{2a-3b}{12} = \frac{a-b-(b-a)-(2a-3b)}{12} = \frac{b}{12}$$

پرش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{2x}{x}$$

$$\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{a-2}{x} - \frac{a}{x}$$

$$\frac{a+c}{ax} - \frac{c}{ax}$$

$$\frac{a-n}{12} = \frac{a+n}{12}$$

$$\frac{a^2+n^2}{a+n} = \frac{a^2-n^2}{a+n}$$

$$\frac{a^2-a^2}{a+n} = \frac{2an}{a+n}$$

$$\frac{n^2-n^2}{a+n} = \frac{2n^2}{a+n}$$

متبصره - بعکس میتوان برخه ای را که برخه ناماش خند جمله باشد مجموع تبری خند برخه

تبدیل نمود

$$\frac{1a-a-x}{12} = \frac{1a}{12} - \frac{x}{12} = \frac{2a}{12} - \frac{x}{12}$$

مثال:

$$\frac{ax+a^2}{a^2} = \frac{ax}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} = 1 + \frac{x}{a}$$

۱۳۲ - جمع تبری چند برخه که برخه نامشان کی نباشد - برای جمع خند برخه که برخه نامشان مساوی نباشد باید برخه نامهای آنها را مساوی نمود (بدون اینکه تغییری در مقدار برخه حاصل شود) و مانند قاعده بالا عمل کرد.

مثال - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{c}$ و $\frac{a}{d}$ را با هم جمع کنیم

اگر a و c هر دو را در d (برخه نام $\frac{a}{d}$) و همچنین c و d هر دو را در a (برخه نام $\frac{a}{a}$) ضرب کنیم برخه نام آنها مساوی میشود و آن است که تغییری در مقدار این دو برخه حاصل نشود ازینقرار:

$$\frac{a}{c} = \frac{a \times d}{c \times d} = \frac{ad}{cd}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c \times a}{d \times c} = \frac{ca}{dc}$$

پس مجموع دو برخه $\frac{a}{c}$ و $\frac{a}{d}$ چنین میشود:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

۱۲۲- قاعده کلی برای مساوی کردن برخه نامها- قاعده کلی این است

که برخه شمار و برخه نام هر برخه را در حاصل ضرب برخه نامهای دیگر ضرب کنیم درین صورت برخه نام مشترک حاصل ضرب برخه نامها میشود چنانکه اگر بخوانیم برخه های $\frac{x}{5}$ و $\frac{y}{3}$ را تبدیل برخه نامی کنیم که دارای یک برخه نام باشند برافق قاعده بالا ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{5} = \frac{x \times 2y}{5 \times 2y} = \frac{2xy}{10y}$$

$$\frac{-a}{2} = \frac{-a \times (-5y)}{2 \times (-5y)} = \frac{5ay}{-10y}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{3 \times (-10)}{y \times (-10)} = \frac{-30}{10y}$$

این قاعده کلی است ولی در حالتی مخصوصی که برخه نامها دارای سازده یا سازده ای مشترک

باشد بهتر است که کوچکترین مضرب برخه نامها را بجای حاصل ضرب آنها برخه نام مشترک انتخاب

چنانکه برای برخه نام مشترک برخه های $\frac{5}{6x}$ و $\frac{y}{9x^2}$ بجای آنکه حاصل

ضرب برخه نامها را برخه نام مشترک قرار دهیم بهتر است که کوچکترین مضرب مشترک بین

$6x$ و $9x^2$ را که $36x^2$ است برخه نام مشترک بگیریم

و می بینیم که $36x^2$ مساوی حاصل ضرب $4x$ است در $9x$

$$4 \quad \cdot \quad 9x^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$36x^2 \quad \cdot \quad 6x \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

بنابر این برای تعیین برده شمارهای هر برده باید برده شمار اولی را در ۹ و دومی را در ۴ و سومی را در ۶ ضرب کنیم از انقارار:

$$\frac{-x}{3x} = \frac{-5 \times 9x}{3x \times 9x} = \frac{-45x}{27x^2}$$

$$\frac{y}{9x} = \frac{4x}{9x \times 3} = \frac{4x}{27x^2}$$

$$\frac{z}{6x} = \frac{5 \times 6x}{6x \times 6x} = \frac{5x}{6x^2}$$

۱۳۴- کوچکترین مضرب مشترک بین چند عبارت جبری - کوچکترین مضرب بین چند عبارت جبری ساده ترین عبارتست که بر آنها بخش پذیر باشد و برای این آن باید هر یک از عبارت های مفروض را با حاصل مضرب ساده های اول تجزیه نمود - کوچکترین مضرب مشترک بین عبارت های مضرب و متن مساوی با حاصل مضرب تمام ساده های اول با نهای بزرگتر.

مثال ۱- کوچکترین مضرب مشترک بین mx و x^2 مساوی mx^2 است

و همچنین $4nx$ و ax مساوی $12anx$ است

مثال ۲- میخواهیم بین $ax^2 - 9$ و $x^2 - 5x + 6$ و $x^2 - 4x + 4$

کوچکترین مضرب مشترک بگیریم

بترتیب خواهیم داشت:

$$ax^2 - 9 = a(x+3)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

بنابر این کوچکترین مضرب مشترک این سه عبارت این است

$$a(x-2)(x+3)(x-2)^2$$

تقرین

مطلوبت تعیین کوچکترین مضرب مشترک این عبارتهای زیر:

$$a, b, a+b$$

$$x, ax, a+x$$

همچنین

$$x+2, 2x+6$$

$$ax+a^2, x+a$$

$$x^2-a^2, a+x$$

$$x^2-4, 2x+6, x-2$$

$$x-3, x^2-9, x^2-5x+6$$

$$x^2-25, x^2-6x+5, x+5$$

$$4a^2-1, 2a+1, a$$

$$x-3 + \frac{5x}{2x-6}$$

رابطه است

مثال ۱- حاصل عبارت

این عبارت را میتوان چنین نوشت:

$$\frac{x-3}{1} + \frac{5x}{2(x-3)}$$

کوچکترین مضرب بر خه نماها $2(x-2)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین است

$$\frac{2(x-2)^2 + 5x}{2(x-2)} = \frac{2x^2 - 7x + 11}{2(x-2)}$$

مثال ۲- حاصل عبارت $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{4x}{1-x^2}$ را بدست

آورید

بر خه نماها را بجا حاصل ضرب سازدهای اول تجزیه میکنیم:

$$\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4x}{(1-x)(1+x)}$$

کوچکترین مضرب مشترک بر خه نماها $2(x-1)(x+1)$ است بنابراین حاصل عبارت

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

بالا چنین میشود

تمرین

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\frac{x^2 + 1}{2x - 2} + 2x + 1$$

$$x^2 + x + 1 - \frac{x+2}{x-1}$$

$$\frac{2a}{a+2} - \frac{a}{a-2} + \frac{1}{a^2-4}$$

$$x + y - \frac{x^2 + y^2}{x + y} - xy$$

$$x^2 + x - \frac{x^2 + 3x^2 + 1}{x^2 - x + 1} + 1$$

$$\frac{2-x}{1-2x} - \frac{2+x}{1+2x} - \frac{1-5x}{4x^2-1}$$

$$2a+3 - \frac{4}{a-2} - (a+1 - \frac{3}{a+4})$$

$$y - 2 - \frac{2y}{y+2} - (y+2 + \frac{2y}{y+2})$$

$$ax+a - \frac{a}{x+1} - (ax+a - \frac{x}{x-1})$$

در مسائل بالا بهترین است که اول بر اثر را ازین برداریم و بعد بایست که را جمع کنیم پس از آن جمع می‌کنیم
برخه را ازینم.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

کوچکترین برخه نام مشترک را می‌توان مساوی $(a-b)(b-c)(c-a)$ گرفت.

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x+z}{(y-z)(y-x)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)} - \frac{ac}{(b-c)(a-b)} - \frac{ab}{(c-a)(b-c)}$$

۷- ضرب برخه ها

۱۳۵- میخواهیم حاصل ضرب برخه ها را در برخه ها بدست بیاوریم.

اگر $\frac{a}{b}$ را q و $\frac{a'}{b'}$ را q' بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{و} \quad \frac{a'}{b'} = q'$$

و میخواهیم حاصل ضرب qq' را بدست آوریم. از دو تساوی بالا چنین برمیاید:

$$a = bq$$

$$a' = b'q'$$

اگر دو طرف این دو تساوی را در یکدیگر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$۵۵ = ۵۵۹۹$$

برای دست آوردن ۵۵ و طرف این تساوی را بر ۵۵ تقسیم میکنیم:

$$۹۹ = \frac{۵۵۹۹}{۵۵}$$

یعنی ۵۵ که حاصل ضرب دو برخه ۹۹ و $\frac{۵۵۹۹}{۵۵}$ میباشد برخه ایست که برخه شمار باشد. حاصل ضرب برخه شمار $(۵۵ و ۹۹)$ و برخه نامش حاصل ضرب برخه نامها $(۵۵ و ۹۹)$ باشد.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-y} \times \frac{x-y}{1} &= \frac{x(x-y)(x+y)}{1(x-y)} = \frac{x(x+y)}{1} \\ \frac{x+a}{x} \times \frac{x}{x^2-a^2} &= \frac{x^2(x^2+a^2)}{x(x^2-a^2)} = \frac{x^2}{x^2-a^2} \end{aligned} \quad \text{مثال}$$

ع ۱۳- تبصره - چون عبارت درست را مستردان شکل برخه آن نوشت که برخه شمارش بنام عبارت و برخه نامش یک باشد بنا بر این برای ضرب یک عبارت درست در یک برخه آن عبارت را در برخه شمار آن برخه ضرب میکنیم.

$$-۲ \times \frac{۵}{۲} = \frac{-۲}{1} \times \frac{۵}{۲} = \frac{-۲۵}{۲} \quad \text{مثال:}$$

$$(x-1) \times \frac{۲}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

نتیجه ۱- هرگاه برخه شمار یک برخه در عبارت ضرب شود مقدار آن برخه آن

عبارت ضرب میشود.

نتیجه ۲- از آنچه گفتیم معلوم میشود که حاصل ضرب x و $\frac{۵۵}{۵۵}$ را مستردان $\frac{۵۵}{۵۵}$

درست حالی که برخه نام و برخه شمار $\frac{۵۵}{۵۵}$ را بر x تقسیم کنیم (بفرض $x \neq ۰$)

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{a}{\frac{b}{x}}$$

یعنی برای ضرب $\frac{a}{b}$ در x میتوان برخ نامش را بر x تقسیم نمود.

مثال:

$$\frac{a+x}{\frac{1}{2}x^2} \times \frac{1}{2}x = \frac{a+x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{a+x}{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}x^2} \times (x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}x}$$

۱۳۷- توان یک برخ - چون توان حالت مخصوصی است از ضرب بر توان

m ام یک برخ برخ است که برخ شمارش توان m ام برخ شمار آن برخ بوده.

برخ نامش توان m ام برخ نام آن باشد یعنی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\frac{a-1}{2x}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{-1}{x-1}\right)^3 = \frac{-1}{(x-1)^3}$$

پیشش های ساده

حاصل جابجایی زیر را بدست آورید:

$$-\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{11}{15}$$

$$-2x \left(-\frac{3}{9}\right)^2$$

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{a}{2x} \times \frac{x}{a}$$

$$\frac{a^2}{n^2} \times \left(-\frac{2n}{a}\right)$$

$$-2ax \left(-\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{a^2}{n^2} \times \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{a^2 - x^2}{a} \times \frac{a}{a+x}$$

$$\frac{a^2 - 4}{2x} \times \frac{6x}{a-2}$$

$$\frac{2x+n}{nx} \times \frac{n^2x^2}{3x-n}$$

$$\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 \times a^2$$

$$\left(\frac{n}{a+n}\right)^2 (a+n)^2$$

$$\frac{n^2-9}{3n^2} \times \frac{x}{n-3}$$

$$\frac{y-x}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{x-y}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\left(\frac{2ax}{k^2}\right)^2 \times \frac{10n}{f^2ax}$$

$$\frac{5ax}{2n^2} \times \frac{9nk}{10a^2} \times \frac{n^2a}{k^2}$$

$$\frac{a}{b^2} \times \frac{dx}{n^2} \times \frac{b^2n^2}{ax}$$

$$\frac{x}{3n^2} \cdot \left(\frac{n}{2x}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2x}{3b^2}\right)^2 \times \frac{12b^2}{12c^2y^2} \times \frac{5a^2}{12cx^2}$$

$$\frac{x^2}{(2x)^2} \times \left(\frac{2a}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2x}{n}\right)^2 \left(\frac{2n}{x}\right)^2$$

$$\frac{n+2}{n-2} \times \frac{n^2-4n+2}{n^2-2}$$

$$\frac{9n}{x} \cdot \left(\frac{-2x}{3n}\right)^2 \left(\frac{9n^2}{2x}\right)^2$$

$$\frac{n^2-4}{n+2} \times \frac{2n+6}{3n-6}$$

$$\frac{a+x}{a-x} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$$

$$\frac{2x-12}{ax+2a} \times \frac{dx+3a}{nx-4n}$$

$$\frac{x+2}{x^2-25} \times \frac{2x-15}{ax+2a}$$

$$\frac{2n^2+9}{5n^2} \times \frac{10n^2}{3n^2+9}$$

$$\frac{5a+5c}{an-cn} \times \frac{an^2-cn^2}{a^2+ac}$$

$$\frac{x^2-16}{2x^2-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2+x-20}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-2} \times \frac{x+2}{x-2}$$

۱۳۸- حل پنجمیهای برده - مثال - مطلوبست حل پنجمی

$$(1) \quad \frac{5x-1}{3x+2} - \frac{3x+2}{2(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{6x^2-6}$$

برده طرف دوم را بطرف اول میآوریم و مجموع طرف اول را حساب میکنیم که عبارت

برده نام مشترک $6(x^2-1)$ است پس خواهیم داشت:

$$(2) \quad \frac{2(x-1)(5x-1) - 3(x+1)(3x+2) - (x^2-3x+2)}{6(x^2-1)} =$$

یعنی هر برده شمار برده نام $(1-x)$ مساوی صفر است بنا بر این لازم است
 (شماره ۵۳) که برده شمار مساوی صفر باشد یعنی:

$$2(x-1)(5x-1) - 3(x+1)(3x+2) - (x^2 - 20x + 2) = 0$$

$$x=2$$

و پس از ساده کردن

توضیح - چنانکه دیده میشود پس از اینکه بچندی (۱) بصورت بچندی (۲) درآمد
 برای حل آن کافی است تنها برده شمارش را مساوی صفر قرار دهیم و چون این برده شمار
 از ضرب کردن دو طرف بچندی (۱) در برده نام مشترک بدست آمده پس کافی است برای
 آسانی از اول (پس از ساده کردن برده نام) دو طرف بچندی (۱) را در کوچکترین برده نام مشترک
 ضرب کنیم بدون اینکه آن برده نام مشترک را بنویسیم.

مثال - مطلوب است حل بچندی

$$\frac{2x-1}{2(x-3)} = \frac{3(x-2)}{3x-1}$$

دو طرف را در $2(x-3)(3x-1)$ که کوچکترین برده نام مشترک است ضرب میکنیم

خواهیم داشت:

$$(2x-1)(3x-1) = 3(x-2) \cdot 2(x-3)$$

که پس از ساده کردن جواب بچندی $x = \frac{7}{5}$ است

تمرین

دیا آنکه برده نام بی اندازه بزرگتر از برده شمار گردد که مادرین جابده ان نیسپرداریم

دین بچند یا را حل کنید:

$$\frac{2(2x-2)}{2(2x-2)} = \frac{1^2}{9}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{2-x}{5-x}$$

$$\frac{2x^2-1}{2x-1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{2-2x}{2} - \frac{2}{5x-2} = \frac{1/5x}{x-2/5} - \frac{2x^2}{2(2x-1)}$$

$$\frac{2x-1}{2x-6} + \frac{5x-7}{2x-9} + \frac{7x+1}{2x-12} = 11$$

$$\frac{2x-5}{5x-5} + \frac{5x-1}{7x-7} + \frac{x-4}{x-1} = 2$$

$$\frac{2x^2-x}{1+x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{2x^2+2x}{x^2-1}$$

مثال - مطلوب حل بچندی

$$\frac{8}{x-2} - \frac{2}{x-5} = \frac{5}{x-2} - \frac{1}{x-6}$$

دو طرف را در کوچکترین مضرب بر خه آنها ضرب میکنیم حاصل میشود:

$$8(x-5)(x-2)(x-6) - 2(x-2)(x-2)(x-6) =$$

$$5(x-2)(x-5)(x-6) - (x-2)(x-5)(x-2)$$

در طرف اول $2(x-2)(x-6)$ و در طرف دوم $2(x-2)(x-5)$ را

مشترک است بنابراین خواهیم داشت

$$2(x-2)(x-6) [2(x-5) - (x-2)] =$$

$$(x-2)(x-5) [5(x-6) - (x-2)]$$

و پس از ساده کردن

$$2(x-2)(x-6)(x-2) = 4(x-2)(x-5)(x-2)$$

طرف دوم را بطرف اول میسریم و چون بین آنها $x-7$ سازده مشترک است پس خواهیم داشت:

$$4(x-7) \left[(x-2)(x-6) - (x-3)(x-5) \right] = 0$$

$$(x-7)(x^2 - 11x + 12 - x^2 + 8x - 15) = 0 \quad \text{دیا}$$

$$x=7 \quad \text{و از آنجا} \quad -3(x-7) = 0 \quad \text{دیا}$$

تمرین

بجای های زیر را حل کنید:

$$\frac{9}{x-7} - \frac{5}{x-1} = \frac{9}{x-2} - \frac{5}{x+1}$$

$$\frac{2}{x-13} - \frac{5}{x-3} = \frac{2}{x-9} - \frac{5}{x-11}$$

$$\frac{5}{x-6} + \frac{4}{x-9} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-10}$$

$$\frac{7}{x-6} + \frac{3}{x-11} = \frac{9}{x-7} + \frac{1}{x-12}$$

$$\frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{x+1}{x+9} + \frac{x+3}{x+5} = \frac{x+9}{x+10} + \frac{x+3}{x+4}$$

$$\frac{a-2}{a-3} + \frac{a-3}{a-4} = \frac{a-1}{a-2} + \frac{a-4}{a-5}$$

$$\frac{y}{y-3} + \frac{9-y}{y-7} = \frac{y+1}{y-2} + \frac{1-y}{y-4}$$

$$\frac{2a-27}{a-13} + \frac{a-7}{a-1} = \frac{a-12}{a-13} + \frac{2a-17}{a-9}$$

و- تقسیم بر خه ها

۱۳۹- می‌خواهیم هر برخه $\frac{a}{b}$ را بر برخه $\frac{c}{d}$ بدست بیاوریم. اگرمانند پیش این

دو برخه را به ترتیب 9 و 9 بنامیم می‌خواهیم $\frac{9}{9}$ را بدست بیاوریم.
اگر دو طرف دو تساوی $a = 69$ و $a = 69$ را بر یکدیگر تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{a}{a} = \frac{69}{69}$$

برای بدست آوردن $\frac{9}{9}$ دو طرف تساوی بالا را در برخه $\frac{9}{9}$ ضرب می‌کنیم بنابراین

$$\frac{9}{9} = \frac{a}{69} \times \frac{9}{9} = \frac{a}{69} \times \frac{9}{9}$$

یعنی: بهر دو برخه مساویست با حاصل ضرب برخه بخشی در وارونه برخه بخش یاب.

مثال:

$$\frac{2}{3x} : \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3x} \times \frac{x^2}{1} = \frac{x}{12}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b} : \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

توجه: از مثال آخر چنین بر میآید که هرگاه برخه نام در عبارت ضرب شود

آن برخه بر آن عبارت تقسیم می‌شود و بعکس. حال اگر در همین مثال برخه شمار و برخه نام $\frac{a}{bx}$ را بر $\frac{a}{b}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx} = \frac{\frac{a}{b}}{x}$$

یعنی: برای تقسیم کردن یک برخه بر یک عبارت می‌توان برخه شمار آن برخه را بر آن عبارت تقسیم نمود.

$$\frac{x^2-1}{a} : (x+1) = \frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{a} = \frac{x-1}{a}$$

مقرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} \frac{-5}{51} : \frac{1}{-17} & \quad ; \quad \frac{22}{29} : \frac{-115}{26} & \quad ; \quad -\frac{4}{5} : \frac{3}{4} \\ \frac{2ab}{x} : \frac{ac}{4ax} & \quad ; \quad \frac{a^2}{n} : \frac{2a}{n^2} & \quad ; \quad \left(\frac{2an}{x}\right)^2 : \frac{6an^2}{9x^2} \\ \frac{a}{2} : \frac{x}{n} & \quad ; \quad \frac{an^2}{2x^2} \end{aligned}$$

در این مثال مانند آن قرار میگیریم که ابتدا خارج قسمت و برضه اول را بدست آورده پس از آن حاصل را بر برضه سوم تقسیم کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2an}{9x^2} : \frac{4an^2}{56x} & : \frac{10an^2}{12x} \\ \frac{15}{4n^2} : \frac{5a}{2n^2} & : \frac{(3n^2)^2}{12a^2} \\ \frac{12x^2}{10x^2} : \frac{6x^2}{5x} & : \frac{4ax}{3x^2} \\ \frac{(4n^2)^2}{12} : \left(-\frac{2}{n}\right)^2 & : \frac{(2n)^2}{-6} \\ \frac{10ab^2}{6-21a^2} : \frac{5b}{2a^2} & : -14a^2b \\ -\left(-\frac{2a}{2x}\right)^2 : -\left(-\frac{2a}{4x^2}\right)^2 & : \left(-\frac{a}{x}\right) \\ \frac{22xy}{-12} : \left(-\frac{y}{4x}\right)^2 & : -\frac{(3xy)^2}{2a^2} \\ \frac{(10n^2)^2}{256} : \left(\frac{-5n^2}{-4}\right)^2 & : \frac{5n^2}{(12n^2)^2} \\ -\frac{a^2}{x} : \left(-\frac{x}{a}\right)^2 & : \left(\frac{a}{x^2}\right)^2 : \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \end{aligned}$$

(۲۱ = ۲۱۰)

$$\frac{2n-1}{15ax^2} : \frac{4n-2}{5x}$$

$$\frac{1-x^2}{x^2-16} : \frac{x-1}{x^2-yx+12}$$

$$\frac{n^2-n^2-12n}{n^2-4n+4} : \frac{3n^2+n^2}{2-2n^2}$$

هـ - مثال های ترکیبی

مثال ۱ - حاصل عبارت $\left(2 - \frac{1}{n+2}\right) : \left(2 - \frac{4}{n+2}\right)$ را بدست

آورید

اول حاصل هر پرانتز را پیدا میکنیم ازینقرار:

$$2 - \frac{1}{n+2} = \frac{2n+2-1}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2}$$

$$2 - \frac{4}{n+2} = \frac{2n+2-4}{n+2} = \frac{2n-2}{n+2}$$

پس از آن این دو حاصل را بر هم تقسیم نماییم:

$$\frac{2n+1}{n+2} : \frac{2n-2}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2} \times \frac{n+2}{2n-2} = \frac{n+1}{n-1}$$

تمرین

۲ - حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\left(x + \frac{2}{n+x}\right) : \left(\frac{2nx+x^2}{n+x} - n\right)$$

$$\left(x-2 - \frac{2A}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\left(n - \frac{2}{n^2}\right) : \left(\frac{2n+2}{n+1} - \left(\frac{3}{4n^2-1} + 2\right)\right)$$

$$\frac{2n-2}{n+2} : \left(2 + \frac{2n}{4x^2-1}\right) \left(\frac{2}{x-2} + 2\right)$$

$$\left[\left(\frac{a}{n} - \frac{n}{a} \right) : \frac{a+n}{2a^2-2an} \right] \cdot \frac{nx}{2(a-n)^2}$$

$$\frac{9n^2+9n}{9n^2-9} : \frac{n+1}{3n-1} \left(3n+2 + \frac{1}{3n} \right)$$

$$\frac{4-4n^2}{4n^2-2an^2} : \frac{2n^2+2}{2n-5} \left(3n^2 + \frac{4n^2-n^3}{n-1} \right)$$

$$(2n^2-2an) : \left(2 + \frac{11}{n} + \frac{5}{n^2} \right) \left(2n-11 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\left(\frac{-6a}{a^2-4} + \frac{2}{2-a} \right) : \frac{2}{a^2-a-2}$$

$$\left(2 - \frac{4}{a+1} \right) : \left(1 - \frac{4a-1}{a^2-1} \right)$$

$$\left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{2x}{x-1} \right)$$

$$\left(\frac{1}{m-x} - \frac{4}{x^2-m^2} \right) : \left(\frac{1}{m-x} - \frac{1}{m+x} \right)$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$$

مثال ۲- عبارت

ساده کنید

از تقسیم حاصل $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \right)$ بر حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right)$

نتیجه بدست می آید.

و نیز می توان برای سادگی در عمل برضه شمار و برضه نام عبارت بالا را در کوچکترین مضرب

برضه نامهای جزء که مساوی $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ است ضرب نمود تا چنین

شود:

$$\frac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(a^2+b^2) - (a-b)^2(a^2+b^2)}$$

که پیش از تجزیه بجاصل ضرب ساز و نامبر شماره ۱۱۳، چنین میشود

$$\frac{4ab^2}{(a^2+b^2)[(a+b)^2-(a-b)^2]}$$

$$\frac{4ab^2}{(a^2+b^2) \cdot 4ab} = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

و یا

یعنی عبارت داده شد و نخواهد است با $\frac{ab}{a^2+b^2}$

مثال ۲- حاصل این عبارت را بدست آورید

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}$$

برخ شمار و برخ نام این برخ را در xy کوچکترین مضرب برخ نامهای جز ضرب میکنیم

بنابر این خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{x^2 - y^2}{y\sqrt{x} - x\sqrt{y}}$$

مقرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$\frac{\frac{v}{3} - 1}{\frac{v}{3} + 1}$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}$$

$$\frac{\frac{a}{6} + \frac{2}{11} + \frac{1}{3}}{\frac{11}{12} - \frac{v}{3} - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{\frac{6}{x} - 5 + 2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{x^2}}$$

$$\frac{2 - 2 - \frac{r_0}{x-2}}{x - 1 - \frac{r_0}{x-2}}$$

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}$$

$$\frac{1 - \frac{a^r}{b^r}}{\frac{1}{b^r} - \frac{a}{b^r}}$$

$$\frac{1}{p - \frac{1}{x + \frac{x}{1-x}}}$$

$$r + \frac{1}{s + \frac{1}{r}}$$

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}$$

$$a - \frac{a - rb}{r - \frac{a+b}{a-b}}$$

$$x - \frac{y}{1 + \frac{1}{\frac{y}{x}}}$$

$$\frac{\frac{r}{b+c} - \frac{1}{c}}{c + \frac{bc}{c-rb}} + \frac{\frac{r}{b+c} - \frac{1}{c}}{b + \frac{bc}{b-rc}}$$

$$\frac{\frac{r y z}{y+z} - y}{\frac{1}{z} + \frac{1}{y-rz}} + \frac{\frac{r y z}{y+z} - z}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z-ry}}$$

$$\frac{x^r + y^r}{y - \frac{x}{1 + \frac{x}{y-x}}} - \frac{y^r - x^r}{y + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+y}}}$$

$$\frac{a+r - \frac{1}{a+r}}{a+r - \frac{r}{a+\Delta}} : \frac{a+p - \frac{1}{a+p}}{a+p + \frac{1}{a+p}}$$

$$\left(\frac{\Delta + r\sqrt{r}}{r - \sqrt{r}} \right)^r \cdot \left(\frac{r - \sqrt{r}}{\sqrt{r} + 1} \right)^r$$

$$\frac{mn - mn^r}{a^r - ab^r} : \frac{mn^r - mn}{ab^r - a^r}$$

$$\frac{(ra+r-\frac{r}{a})\frac{ra-r}{a-1}}{\frac{ra^r-r}{ra+ra}}$$

$$\frac{1 + \frac{y^r+z^r-x^r}{r y z}}{1 - \frac{x^r+y^r-z^r}{r x y}}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{y}+r}{\frac{x}{y}+1} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x}{y}+r - \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-a}{1+a}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} : \frac{1+ab}{a-b}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})^r}{x-\frac{1}{x}} : \frac{1}{1+x}$$

$$\left(r - \frac{rn}{n} + \frac{rn^r - rn}{n^r + r mn}\right) : \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m - n - \frac{rn^r}{m+n}}\right)$$

۲. - میاس نقشه ای $\frac{1}{80000}$ است یعنی هر ۸۰ کیلومتر در نقشه یک متر نمایش داده میشود حال

اگر فاصله دو شهر ۵ کیلومتر باشد درین نقشه چقدر فاصله خواهند داشت ؟ و بکس اگر فاصله دو شهر درین

نقشه ۵۰۰ میلی متر باشد حقیقتاً فاصله این دو شهر چقدر است ؟ (حالت مخصوص $\alpha = 160$ و

$$\alpha = 500$$

۳. - $\frac{1}{4}$ پیرای ۵ ریال ارزش دارد تعیین کنید ارزش $\frac{5}{8}$ آنرا (حالت مخصوص

$$\alpha = 120$$

۴. - دو کارگر کاری را در ۵ روز انجام میدهند آدی به تنهایی آنرا در ۳ روز تمام میکنند

معلوم کنید کارگر دوم به تنهایی در یک روز چقدر کار را تمام میکند ؟ (حالت مخصوص

$$\alpha = 120 \text{ و } \alpha = 180$$

۵. - فاصله دو شهر ۵ کیلومتر است تری این فاصله را با تندی متوسط ۳۵ کیلومتر در ساعت

می پاید اگر فرض کنیم ماشین در دورای پن دو شهر مدت نیم ساعت توقف کند پس از چه مدتی از شهر اول

بشود دوم میرسد ؟

۶. - تندی متوسط ماشینی در پیچیدن را بی ۵ کیلومتر در ساعت است یک قسمت این راه را با تندی

۳ کیلومتر در ساعت پیچیده حساب کنید تندی ماشین را در بقیه راه .

۷. - یک دسته هواپیما باید در ساعت ۱۷ بر فراز شهری که فاصله ۵ کیلومتر است آشکار شوند

اگر تندی متوسط آنها ۵ کیلومتر در ساعت باشد چه ساعتی باید حرکت کنند ؟ (حالت مخصوص $\alpha = 700$ و

۸- در مسئله پیش فرض میکنیم کیلومتر $\alpha = ۶۰۰$ و کیلومتر ساعت $\beta = ۲۰۰$ باشد
اگر هوا منقلب بوده و باد مخالفی به تند γ کیلومتر ساعت بوزد چند دقیقه زودتر باید حرکت
کنند تا در موقع مقرر بشهر منظور برسند؟

۹- شخصی α ریال به بکار است $\frac{1}{4}$ بدی خود را میسپارد و پس از مدتی مجبور میشود که
مبلغی مساوی $\frac{1}{8}$ آنچه که به بکار است فرض کند معلوم کنید بدی او چه مبلغ میشود و از قیاس
و در عمل چه مبلغی از بدی خود را کرده است؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۱۵۰$)

۱۰- بنائی میتواند به تنهایی کارهای را α روز و بسازد بنائی دیگر به تنهایی جان کار را β
روزه تحویل میدهد پس از آنکه بنائی دوم یک روز کار کرد هر دو را با هم کار بکار چه ساختن کار را
چند روزه تمام میشود؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۴$ و $\beta = ۶$)

۱۱- بنای دستور مهندس ساختن α متر کتب مخلوط ماسه و سیان به نسبت $\frac{1}{4}$ تمهید شده
(یعنی در سه قسمت مخلوط یک قسمت سیان و دو قسمت ماسه میباشد) اتفاقاً مهندس تفسیر را اینگونه
به نسبت $\frac{1}{8}$ باشد چه مقدار ماسه باید به مخلوط افزوده شود؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۲$)

۱۲- در استیلا و بهترین روشی برای پر کردن مخزن زیر زمینی دو دهنه از لوله موجود است از مخزن
به تنهایی در سه ربع ساعت میگذرد و برای مواقع عادی است و دومی آنرا در یک ساعت و ربع میگذرد و کما
در روز سوم است که مصرت زیر زمین زیاد است میخواهند هر دو دهنه را با یکدیگر بزنند معلوم کنید پر کردن مخزن

چه اندازه طول خواهد کشید؟
نقطه مخصوص

